Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 13 Aprile 2018
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 24 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I sei problemi numerati da 16 a 21, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 22, 23 e 24, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 10.

- Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 2** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. L'estrazione da un'urna contenente biglie di colore bianco e nero è preceduta dall'estrazione da un sacchetto contenente 10 bussolotti numerati da 1 a 10: se esce il bussolotto i allora l'urna sarà riempita con i biglie bianche e $10 - i$ biglie nere. La probabilità che esca una biglia bianca è:

(A) uguale a $\frac{1}{2}$.

(B) minore di $\frac{1}{2}$.

(C) uguale a 1.

(D) maggiore di $\frac{1}{2}$.

(E) nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Per $i < 10$, l'uscita del bussolotto i (i biglie bianche nell'urna) è *bilanciata* dall'uscita del bussolotto $10 - i$ (i biglie nere nell'urna). La procedura di estrazione, però, non è esattamente simmetrica: mentre è possibile avere la composizione dell'urna con 10 biglie bianche ($i = 10$) e nessuna biglia nera la composizione complementare, ovvero, nessuna biglia bianca e 10 biglie nere è impossibile. Ciò favorisce, in termini di probabilità l'uscita di una biglia bianca.

Problema 2. Ogni giorno Biancaneve prepara sette sacchetti per il pranzo dei nani che vanno a lavorare in miniera e la cena per quando ritornano. Un giorno non sta bene e non riesce a farlo. Come si può enunciare questa situazione?

(A) Un giorno Biancaneve non prepara 7 sacchetti e prepara la cena.

(B) Un giorno Biancaneve non prepara 7 sacchetti e non prepara la cena.

(C) Un giorno Biancaneve non prepara 7 sacchetti o non prepara la cena.

(D) Un giorno Biancaneve prepara 7 sacchetti e non prepara la cena.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, affinché Biancaneve venga meno al suo compito, basta che non faccia almeno una delle sue due mansioni quotidiane.

Problema 3. Individuare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log^2_{1/4} x - 3\log_{1/4} x + 2}.$$

(A) $\left]0, \frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

(B) $\left[0, \frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

(C) $\left]0, \frac{1}{16}\right[\cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

[1]Nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento orientato è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB è il segmento orientato da A verso B); un segmento non orientato è indicato sovralineando il simbolo del segmento orientato (ad esempio, $\overline{AB}$); la lunghezza di un segmento è indicata racchiudendo il segmento (orientato o meno) tra una coppia di linee verticali (ad esempio, $|AB|$ oppure $|\overline{AB}|$) ; un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua il vertice dell'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x; $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(D) $\left]0, \frac{1}{16}\right[\cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

(E) $\left]0, \frac{1}{16}\right] \cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (A).
Infatti, si deve imporre che

$$\begin{cases} \log_{1/4}^2 x - 3\log_{1/4} x + 2 \geq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

La prima disequazione, ponendo $y = \log_{1/4} x$, diventa

$$y^2 - 3y + 2 \geq 0,$$

da cui

$$y \leq 1 \ \vee y \geq 2,$$

che implica

$$x \leq \frac{1}{16} \ \vee \ x \geq \frac{1}{4}.$$

Intersecando l'insieme delle soluzioni della prima disequazione con la condizione di esistenza del logaritmo, si ha

$$0 < x \leq \frac{1}{16} \ \wedge \ x \geq \frac{1}{4}.$$

Problema 4. Facendo ruotare una bandierina a forma di trapezio rettangolo di un intero giro intorno alla base maggiore si ottiene un solido A. Quanto vale la superficie totale di A espressa in funzione dell'altezza h e della base minore b del trapezio sapendo che la differenza tra le due basi del trapezio è $\sqrt{3}h$?

(A) $\pi(h^2 + b^2)$.

(B) $2\pi h(b + \sqrt{3}h)$.

(C) $\pi h(\sqrt{3} + 1)h + b$.

(D) $\pi h[b + (\sqrt{3} + 1)h]$.

(E) $\pi h(3h + 2b)$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
Il solido è costituito da un cilindro e da un cono avente per base la base del cilindro. La sua superficie totale si ottiene sommando la superficie laterale del cilindro, quella del cono e l'area della base del cilindro. Il raggio di base di cono e cilindro vale h e l'altezza del cilindro è b. Inoltre, l'altezza del cono è la differenza tra le basi del trapezio e quindi $\sqrt{3}h$, da cui si ricava che l'apotema del cono vale $2h$. Si ottiene così

$$S = 2\pi hb + 2\pi h^2 + \pi h^2 = \pi h(3h + 2b).$$

Problema 5. Individuare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3^x - 3}{\ln x}.$$

(A) $\ln 3$.

(B) $3 \ln 3$.

(C) $3 \log_3 e$.

(D) 3.

(E) 0.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
Infatti, operando un cambiamento di variabile $y = x - 1$, il limite diventa

$$\lim_{y\to 0} \frac{3(3^y - 1)}{\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0} \left[\frac{3(3^y - 1)}{y} \cdot \frac{y}{\ln(y+1)}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{3(3^y - 1)}{y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 3\ln 3.$$

Problema 6. Un vaso per fiori ha la forma di un tronco di cono e le sue dimensioni sono espresse in decimetri. La misura dell'altezza è pari alla distanza della retta r di equazione $4x - 3y + 5 = 0$ dall'origine di un sistema di assi cartesiani monometrico ortogonale. Il raggio della base maggiore è pari alla distanza del vertice della parabola γ di equazione $x = -y^2 + 3$ dal punto $(1, 0)$. Infine, l'angolo al vertice del cono da cui il vaso è ottenuto vale $\frac{\pi}{4}$. Quanta acqua può contenere il vaso?

(A) Esattamente 7 litri.

(B) Tra 7 litri e 7,5 litri.

(C) Esattamente $7, 5$ litri.

(D) Tra $7, 5$ litri e 10 litri.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
La distanza dell'origine dalla retta r vale $(4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5)/\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 1$ dm. Il vertice di γ è il punto $(3 = \frac{-12}{-4}, 0 = \frac{0}{-2})$ la cui distanza dal punto $(1, 0)$ è 2 dm. Si denoti, ora, con T_1 il triangolo rettangolo avente per cateti l'altezza del cono ed il raggio della base maggiore e con T_2 il triangolo rettangolo avente per cateti la differenza tra l'altezza del cono e quella del vaso ed il raggio della base minore. T_1 e T_2 sono rettangoli sono simili e, per il fatto che l'angolo al vertice vale $\frac{\pi}{4}$, sono anche isosceli. Se ne ricava che il raggio della base minore è 1 dm. Quindi il volume V del vaso è

$$V = \frac{4\pi + \pi + \sqrt{4\pi \cdot \pi}}{3} \cdot 1\text{dm}^3 = \frac{7}{3}\pi\text{dm}^3 \simeq 7,33\text{dm}^3.$$

Problema 7. Quale delle seguenti funzioni ha grafico simile[2] al grafico della funzione $y = \operatorname{sen}(x)$?

(A) $y = 2\operatorname{sen}(x)$.

(B) $y = \operatorname{sen}(2x)$.

(C) $y = 2\operatorname{sen}(2x)$.

(D) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Fissato nel piano un riferimento cartesiano (ortogonale monometrico levogiro), sia T la trasformazione

$$T : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, y)^T = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

[2] La *similitudine* è una trasformazione che conserva il rapporto delle distanze.

Ovviamente T è una similitudine:

$$\begin{aligned} d^2\left[(x_1,y_1)^T,(x_2,y_2)^T\right] &= d^2\left[\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1}{2}\right),\left(\frac{x_2}{2},\frac{y_2}{2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}-\frac{y_2}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}d^2\left[(x_1,y_1),(x_2,y_2)\right] \end{aligned}$$

sicché il rapporto delle distanze è costante e uguale a $1/2$.
Posto $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = \operatorname{sen}(2x)/2$, si ha

$$(x, f(x))^T = \left(\frac{x}{2}, g\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

e quindi T trasforma il grafico di $f(x)$ in quello di $g(x)$: più precisamente, il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ (e in ogni intervallo di ampiezza 2π) in quello di $g(x)$ nell'intervallo $[0, \pi]$ (rispettivamente, nel corrispondente intervallo dimezzato, per esempio, quello di sinistra). D'altra parte, disegnando i grafici delle quattro funzioni (A)-(D) (nell'intervallo $[0, 2\pi]$ per (A); nell'intervallo $[0, \pi]$ per (B), (C) e (D)), si riconosce subito che soltanto il grafico di (D) ha la stessa forma del grafico di $\operatorname{sen}(x)$.

Problema 8. Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + e^{2x}}{2x^4 + 5x^2 + e^{2x}},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) f è limitata superiormente ma non inferiormente.

(B) f è limitata inferiormente ma non superiormente.

(C) f è limitata superiormente e inferiormente.

(D) f è limitata superiormente e continua in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(E) f è limitata superiormente e derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
La funzione è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ poiché il denominatore è strettamente positivo. Inoltre, trattandosi di una funzione continua, dal fatto che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

segue che f è limitata sia superiormente che inferiormente.

Problema 9. Quale resto si ottiene dividendo 7^{2018} per 5?

(A) Il resto della divisione per 5 di 7^{2018} è 0.

(B) Il resto della divisione per 5 di 7^{2018} è 1.

(C) Il resto della divisione per 5 di 7^{2018} è 2.

(D) Il resto della divisione per 5 di 7^{2018} è 3.

(E) Il resto della divisione per 5 di 7^{2018} è 4.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
Infatti

$$
\begin{aligned}
&7^0 = 5 \cdot 0 + 1, \quad 7^1 = 5 \cdot 1 + 2, \quad 7^2 = 5 \cdot 7 + 14 = 5 \cdot (7+2) + 4 = 5a + 4,\\
&7^3 = 5a \cdot 7 + 28 = 5 \cdot (a \cdot 7 + 5) + 3 = 5b + 3,\\
&7^4 = 5b \cdot 7 + 21 = 5 \cdot (b \cdot 7 + 4) + 1 = 5c + 1,
\end{aligned}
$$

(con opportuni a, b, c) e quindi 1 è il resto della divisione per 5 di 7^{4q} (per ogni q). D'altra parte $2018 = 4 \cdot 504 + 2$. Dunque:

$$7^{2018} = 7^{4 \cdot 504} \cdot 7^2 = (5c+1)^{504} \cdot (5a+4) = (5d+1) \cdot (5a+4) = 5e + 4,$$

(con opportuni d, e).

Problema 10. Un tubo di cavo elettrico di altezza 10 cm e diametro 2 cm ha al suo interno tre cavi sottili, uguali, tangenti tra loro e tangenti al tubo esterno. Si faccia riferimento alla Fig. 1. Che

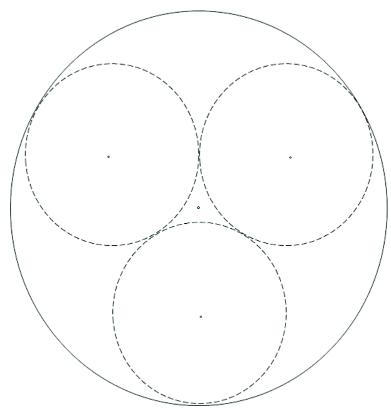

Figura 1: Ad illustrazione del Problema 10.

volume occupa ogni cavo sottile?

(A) $10\pi(7 - 4\sqrt{3})$.

(B) $20\pi(2\sqrt{3} - 3)$.

(C) $30\pi(7 - 4\sqrt{3})$.

(D) $10\pi(2 - 3\sqrt{3})$.

(E) 5π.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Si faccia riferimento alla Fig. 2. Indicato con r il raggio dei cavi interni, il triangolo ABC è equilatero di lato $|AB| = 2r$; inoltre, essendo O il baricentro di ABC, risulta $|OC| = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$. Infine, dal fatto che $|OE| = 1$ (è il raggio del tubo), si ha

$$1 = |OC| + |CE| = \frac{2}{3}r\sqrt{3} + r,$$

da cui $r = 2\sqrt{3} - 3$ e la soluzione si ottiene immediatamente considerando che il volume di ciascuno dei cavi sottili vale $10\pi r^2$.

Problema 11. Sia assegnata l'equazione

$$2^{x^3 - 3x + 1} = a$$

con $a \in \mathbb{R}$. Sapendo che la funzione $f(x) = 2^{x^3-3x+1}$ ha un punto di massimo relativo in $x = -1$ e un punto di minimo relativo in $x = 1$, quale delle seguenti affermazioni è falsa?

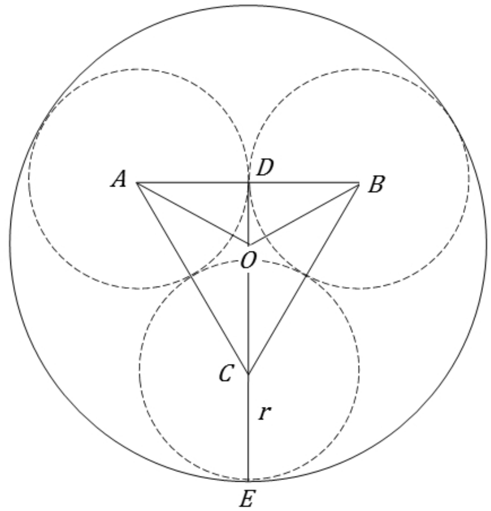

Figura 2: Ad illustrazione della soluzione del Problema 10.

(A) L'equazione ammette una sola soluzione reale per $0 < a < \frac{1}{2}$ e per $a > 8$.

(B) L'equazione ammette due soluzioni reali per $a = \frac{1}{2}$ e per $a = 8$.

(C) L'equazione ammette tre soluzioni reali per $\frac{1}{2} < a < 8$.

(D) L'equazione non ammette soluzioni reali per $a \leq 0$.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
La risposta contrassegnata con (D) è vera. Infatti, l'equazione non ammette soluzioni per $a \leq 0$ poiché

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2^{x^3-3x+1} > 0.$$

Le risposte contrassegnate con (A), (B), (C) sono vere. Infatti, si osservi che

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad f(-1) = 8 \quad \text{e} \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

Allora, disegnando un grafico qualitativo di f (si veda la Figura 3) si vede che l'equazione proposta ha:

- 1 soluzione reale per $0 < a < \frac{1}{2}$ e per $a > 8$ (risposta (A));
- 2 soluzioni reali per $a = \frac{1}{2}$ e per $a = 8$ (risposta (B));
- 3 soluzioni reali per $\frac{1}{2} < a < 8$ (risposta (C)).

Problema 12. Un bambino sale su una giostra che si muove in senso antiorario ed impiega 1 minuto per completare il giro. Supposto che la posizione iniziale del bambino sia nel punto $(0, 1)$, qual è la sua posizione in coordinate cartesiane dopo 40 secondi?

(A) $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(B) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(C) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

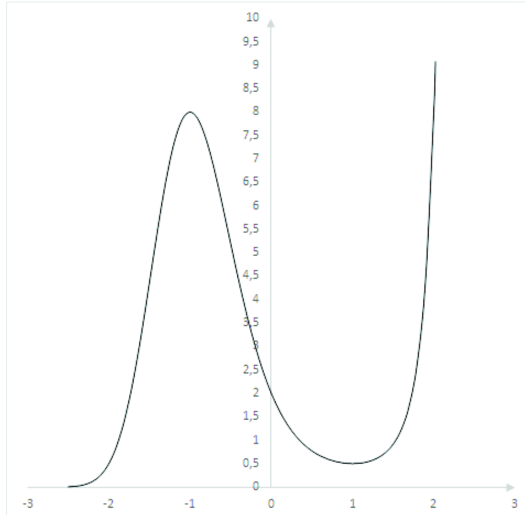

Figura 3: Ad illustrazione della soluzione del Problema 11.

(D) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

(E) $(0, -1)$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, il bambino completa un intero giro in 60 secondi quindi in 40 secondi si sposta di un angolo $\theta = \frac{4}{3}\pi$. Poichè egli parte dal punto $(0, 1)$ la sua posizione dopo 40 secondi è individuata dall'angolo $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi = \frac{11}{6}\pi = 2\pi - \frac{1}{6}\pi$.
Quindi, il bambino si trova nel quarto quadrante e in termini di coordinate cartesiane la sua posizione è data da

$$x = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad y = \text{ sen }\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{ sen }\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Problema 13. Sei gatti mangiano sei topi in sei minuti. Quanti gatti serviranno per mangiare 100 topi in 50 minuti?

(A) Sei.

(B) Otto.

(C) Dieci.

(D) Dodici.

(E) Un numero diverso dai precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Sei gatti mangiano 1 topo in 1 minuto, 2 topi in 2 minuti, $\ldots$, 50 topi in 50 minuti. Dunque, per mangiarne il doppio (100 topi), occorrono 12 gatti (il doppio dei gatti).

Problema 14. Dieci giocatori, di cui 4 sono femmine, partecipano alla prima giornata di un torneo di tennis. I 5 incontri di singolo sono determinati mediante un'estrazione senza rimpiazzamento da un'urna dei nomi dei 10 giocatori: i primi due nomi estratti determinano il primo incontro, il terzo e il quarto nome estratto determinano il secondo incontro e così via. Qual è il numero m dei possibili sorteggi che non fanno svolgere incontri tra due giocatrici?

(A) $m = 210$.

(B) $m = 80$.

(C) $m = 16$.

(D) $m = 5$.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata dalla lettera (B). Il numero complessivo di sorteggi nei quali non si sfidano due giocatrici vale $\binom{5}{1}$: ci sono 5 incontri e uno di essi è necessariamente giocato da due giocatori (negli altri quattro si incontrano un giocatore e una giocatrice). D'altra parte per ciascun incontro nel quale è presente una giocatrice essa potrebbe essere stata sorteggiata come primo o come secondo elemento della coppia. In definitiva il numero richiesto è:

$$m = 2^4 \cdot \binom{5}{1} = 16 \cdot 5 = 80.$$

Problema 15. Tutte le radici del polinomio

$$f(x) = x^6 - 1009x^5 - 4x^4 + 4034x^3 + 2021x^2 - 3025x - 2018$$

sono numeri interi. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera.

(A) $f(x)$ ha sei radici distinte e soltanto una di esse è un numero primo.

(B) $f(x)$ ha sei radici distinte e soltanto due di esse sono numeri primi.

(C) $f(x)$ ha quattro radici distinte e soltanto una di esse è un numero primo.

(D) $f(x)$ ha quattro radici distinte e soltanto due di esse sono numeri primi.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata dalla lettera (D).
Un intero, se è radice di $f(x)$, deve necessariamente dividere il termine noto -2018. Si ha $2018 = 2 \cdot 1009$, con 2 e 1009 primi (infatti $31^2 < 1009 < 32^2$ e 1009 non è multiplo di alcun primo non maggiore di $\sqrt{1009}$: dividendo 1009 per $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ si ottengono, rispettivamente, i resti: $1, 1, 4, 1, 8, 8, 6, 2, 20, 23, 17$). Dunque le radici intere (e quindi, per quanto scritto nel testo, tutte le possibili radici) del polinomio sono fra i numeri: $\pm 1, \pm 2, \pm 1009, \pm 2018$. Si verifica subito che $f(1) = 0$ e quindi (usando la regola di Ruffini) si ha $f(x) = (x-1)f_1(x)$, con

$$f_1(x) = x^5 - 1008x^4 - 1012x^3 + 3022x^2 + 5043x + 2018.$$

Poiché $f_1(1) \neq 0$, 1 è una radice semplice di $f(x)$. Si ha $f_1(-1) = 0$ e così (regola di Ruffini) $f_1(x) = (x+1)f_2(x)$ dove

$$f_2(x) = x^4 - 1009x^3 - 3x^2 + 3025x + 2018.$$

È $f_2(-1) = 0$ e si ha $f_2(x) = (x+1)f_3(x)$, con

$$f_3(x) = x^3 - 1010x^2 + 1007x + 2018.$$

Ancora $f_3(-1) = 0$ e $f_3(x) = (x+1)f_4(x)$, con

$$f_4(x) = x^2 - 1011x + 2018.$$

Chiaramente $f_4(2) = 0$ e, con un'ultima applicazione della regola di Ruffini, si ha infine

$$f_4(x) = (x-2)(x-1009).$$

In conclusione

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)f_1(x) = (x-1)(x+1)f_2(x) = (x-1)(x+1)^2 f_3(x) \\ &= (x-1)(x+1)^3 f_4(x) = (x+1)^3(x-1)(x-2)(x-1009) \end{aligned}$$

e così $f(x)$ ha quattro radici distinte, tutte intere, una tripla e tre semplici, ed esattamente due di esse sono numeri primi (2 e 1009).

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Assegnato il triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(10,0)$ e $B(6,12)$ si determinino le dimensioni del rettangolo (avente la base sul segmento OA) di area massima inscritto in esso.

Soluzione. La soluzione è fornita dalla coppia $(5,6)$. Si faccia riferimento alla Figura 4. Nel

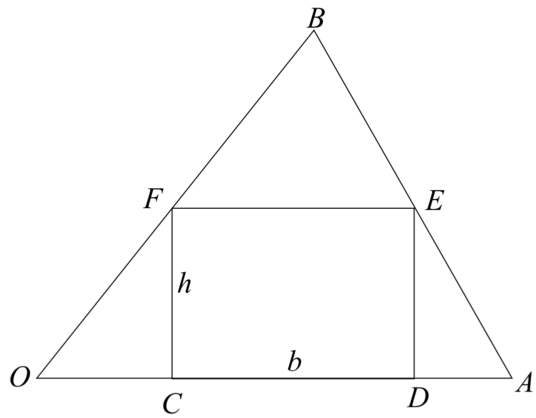

Figura 4: Ad illustrazione della soluzione del Problema 16.

sistema di riferimento monometrico ortogonale con origine in O e asse delle ascisse contenente il lato OA del triangolo assegnato, la retta passante per i punti O e B ha equazione $y = 2x$ mentre la retta passante per i punti A e B ha equazione $y = -3x + 30$. Indicata allora con x l'ascissa del punto C e con b la lunghezza della base del rettangolo, risulta $C(x,0)$, $F(x,2x)$, $D(x+b,0)$ e $E(x+b,-3(x+b)+30)$. Di conseguenza, per $x \in (0,6)$, risulta $h = 2x$ e

$$|FC| = |ED| \iff 2x = -3(x+b) + 30 \iff b = 10 - \frac{5}{3}x. \tag{1}$$

L'area del rettangolo considerato è dunque la funzione di x

$$A(x) := \text{Area}(CDEF) = 2x(10 - \frac{5}{3}x) = -\frac{10}{3}x^2 + 20x,$$

con derivata prima

$$A'(x) = -\frac{20}{3}x + 20 = \frac{20}{3}(-x+3). \tag{2}$$

Osservando, inoltre, che

$$\lim_{x\to 0^+} A(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[2x\left(10 - \frac{5}{3}x\right)\right] = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 6^-} A(x) = \lim_{x\to 6^-}\left[2x\left(10 - \frac{5}{3}x\right)\right] = 0,$$

dalla (2) segue che l'area massima si realizza quando $x = 3$. Allora, l'altezza del rettangolo di area massima vale 6 e la (1) fornisce $b = 5$.

Problema 17. Determinare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x^2+4x} - x + 2}.$$

Soluzione. Imponendo che il radicando sia non negativo si ottiene:

$$\sqrt{x^2+4x} \geq x - 2,$$

che implica

$$\begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 4x \geq (x-2)^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -4 \vee x \geq 0 \\ x < 2 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \quad .$$

In definitiva il dominio di $f(x)$ è

$$x \leq -4 \ \vee \ x \geq 0.$$

Problema 18. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$$

Soluzione. Il limite richiesto vale $\frac{1}{\sqrt{e}}$. Tenendo conto che nell'intorno di 0 la funzione coseno assume valori positivi, è possibile applicare la formula $r = e^{\ln r}$ per ottenere:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}} &= \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{\tan^2 x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\tan^2 x}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\tan^2 x}\right]} \\
&= e^{\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan^2 x}\right]} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\right]}.
\end{aligned}$$

Il risultato segue dal fatto che, con la sostituzione $y = \cos x - 1$, risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x - 1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Problema 19. La successione x_n, per $n = 0, 1, \ldots$, è definita dalla posizione

$$x_{n+1} = 2x_n + q.$$

Sapendo che $x_0 = 1$ e $q = -\frac{1}{15}$ determinare x_8.

Soluzione. Risulta che $x_8 = 239$. Infatti, in primo luogo si ha:

$$\begin{aligned}
x_n &= 2x_{n-1} + q \\
&= 2(2x_{n-2} + q) + 2q + q = 2^2 x_{n-2} + 2q + q \\
&= 2^2(2x_{n-3} + q) + 2q + q = 2^3 x_{n-3} + (2^2 + 2 + 1)q \\
&= \ldots \\
&= 2^n x_0 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1)q.
\end{aligned}$$

Inoltre, poichè $x_0 = 1$ ed è noto che con $h \neq 1$ risulta $\sum_{j=0}^{N} h^j = \frac{h^{N+1}-1}{h-1}$, il termine generale della successione è:

$$x_n = 2^n + (2^n - 1)q.$$

Dal fatto che $q = -\frac{1}{15}$, si ricava infine che:

$$x_8 = 2^8 + (2^8 - 1)q = 256 + 255q = 256 - \frac{255}{15} = 239.$$

Problema 20. I punti A_1, A_2, A_3, A_4 sono i vertici (ordinati in senso antiorario) di un quadrato Q; β è la circonferenza inscritta nel quadrato Q e B_1, B_2, B_3, B_4 sono i punti (ordinati in senso antiorario) in cui β è tangente ai lati di Q; γ è la circonferenza inscritta nel quadrato Q' di vertici B_1, B_2, B_3, B_4 e C_1, C_2, C_3, C_4 sono i punti (ordinati in senso antiorario) in cui γ è tangente ai lati di Q'; P è un punto di γ le cui distanze da C_1 e da C_3 sono $|PC_1| = 15$ e $|PC_3| = 28$. Quanto vale l'area del quadrato Q?

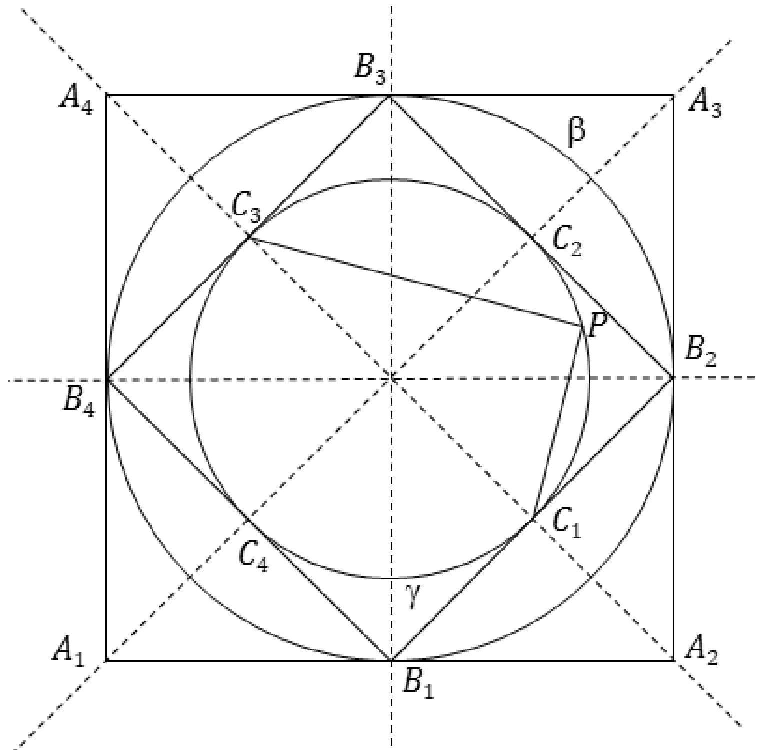

Figura 5: Ad illustrazione della soluzione del Problema 20.

Soluzione. La risposta è 2018. Si faccia riferimento alla Figura 5. Il triangolo C_1PC_3 è rettangolo in P (perché inscritto nella circonferenza γ, con C_1C_3 diametro di γ: in una circonferenza, un angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro) e quindi per il teorema di Pitagora: $|C_1C_3| = \sqrt{15^2 + 28^2} = \sqrt{1009}$. Ma C_1C_3 è congruente al lato del quadrato Q'. Dunque 1009 è l'area di Q'. Poiché il lato del quadrato Q è congruente alla diagonale di Q' (per esempio $A_1A_2 \equiv B_2B_4$), l'area di Q è il doppio dell'area di Q'.

Problema 21. Per quanti e quali interi $n \geq 5$ si ha $\binom{n}{2} = \binom{n}{5}$?[3]

Soluzione. Solo per $n = 7$. In primo luogo, dal fatto che 2 e 5 si complementano rispetto a 7 segue subito che $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$. Poi

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{5} \quad \text{equivale a} \quad \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n!}{5!(n-5)!}$$

che si traduce subito in $5 \cdot 4 \cdot 3 = (n-2)(n-3)(n-4)$ ovvero

$$n^3 - 9n^2 + 26n - 84 = 0. \tag{3}$$

Ora, osservando che 7 è un divisore di 84 che annulla il polinomio a primo membro nella (3), la divisione di quest'ultimo per $n - 7$ fa ottenere:

$$(n-7)(n^2 - 2n + 12) = 0,$$

dalla quale si evince che la (3) non ha altre soluzioni reali (e in particolare intere).

[3]Nella risposta indicare dapprima il numero delle soluzioni seguito da un punto e virgola e poi le soluzioni: $m; n_1, n_2, \ldots, n_m$.

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 22. γ è la circonferenza circoscritta a un triangolo acutangolo di vertici A, B, C (ordinati in senso antiorario); r_A, r_B, r_C sono le rette per i vertici A, B, C, perpendicolari ai lati opposti BC, CA, AB (rispettivamente); A', B', C' sono le loro intersezioni con BC, CA, AB (rispettivamente); A'', B'', C'' sono le loro intersezioni con γ (rispettivamente).
Dimostrare che i triangoli $\Delta A'B'C'$ e $\Delta A''B''C''$ sono simili.

Soluzione. Si faccia riferimento alla Figura 6. Detto H l'ortocentro del triangolo ABC, si

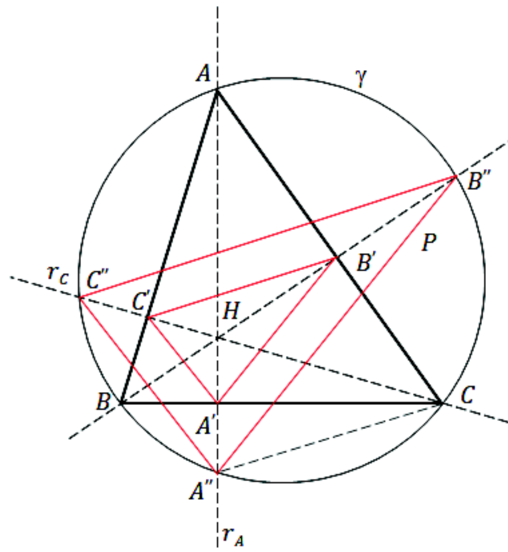

Figura 6: Ad illustrazione della soluzione del Problema 22.

considerino i triangoli rettangoli $A'CH$ e $A'CA''$ (con $\hat{A}'$ retto).

1. $A'\hat{C}H = B\hat{C}C' \equiv A'\hat{A}B$ perché entrambi complementi dell'angolo $A\hat{B}C$ nei triangoli rettangoli $A'AB$ e $C'CB$.
2. $A''\hat{C}A' = A''\hat{C}B \equiv A''\hat{A}B = A'\hat{A}B$ perché angoli alla circonferenza γ inscritti nello stesso arco $\overset{\frown}{A''B}$.
3. $A'\hat{C}H \equiv A''\hat{C}A'$.
4. $\Delta A'CH \equiv \Delta A'CA''$.
5. $A'H \equiv A'A''$.
6. A' è il punto medio di HA''. Analogamente B' è il punto medio di HB''.
7. $A'B' \parallel A''B''$ (perché $A'B'$ passa per i punti medi di due lati del triangolo $\Delta A''HB''$ e quindi è parallelo al terzo lato di questo triangolo).

Analogamente $B'C' \parallel B''C''$ e $C'A' \parallel C''A''$. Dunque, avendo i lati paralleli, i triangoli $\Delta A'B'C'$ e $\Delta A''B''C''$ sono simili (hanno angoli corrispondenti congruenti).

Problema 23. Un escursionista (si veda la Figura 7 dalla quale si evincono in particolare posizioni, distanze e velocità) partendo dalla posizione A decide di raggiungere la meta C. L'escursionista può percorrere due diversi tragitti:

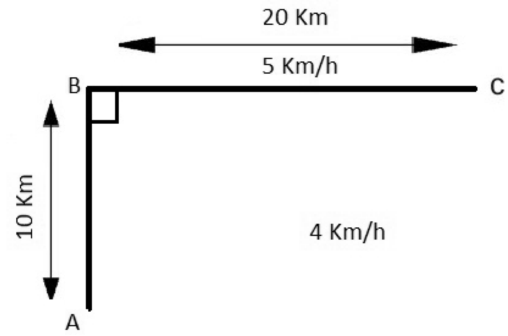

Figura 7: Ad illustrazione del Problema 23.

Tragitto 1: può raggiungere direttamente la meta C percorrendo un terreno accidentato alla velocità costante di 4 km/h;

Tragitto 2: può raggiungere un punto qualsiasi della strada asfaltata BC percorrendo il terreno accidentato alla velocità costante di 4 km/h per poi raggiungere la meta C percorrendo la strada asfaltata alla velocità costante di 5 km/h.

Quale percorso dovrà scegliere l'escursionista per raggiungere la meta C nel minor tempo possibile?

Soluzione. Il tempo t_{AC} impiegato dall'escursionista per andare da A a C procedendo lungo il **Tragitto 1** è il seguente:

$$t_{AC} = \frac{|AC|}{4} = \frac{\sqrt{100+400}}{4} = \frac{5}{2}\sqrt{5} \approx 5,59\,\mathrm{h}.$$

Invece, indicato con P un punto appartenente a BC distante $x \in [0, 20]$ km da B (si veda la

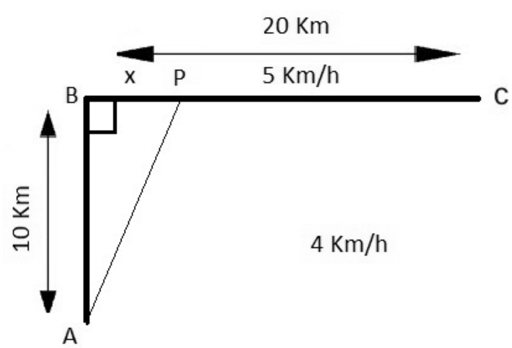

Figura 8: Ad illustrazione della soluzione del Problema 23.

Figura 8), con t_{AP} il tempo impiegato dall'escursionista per andare da A a P e con t_{PC} il tempo impiegato dall'escursionista per andare da P a C, utilizzando il **Tragitto 2** risulta

$$|AP| = \sqrt{100+x^2}, \quad t_{AP} = \frac{\sqrt{100+x^2}}{4}, \quad |PC| = 20 - x, \quad t_{PC} = \frac{20-x}{5}.$$

Pertanto, l'escursionista procedendo lungo il **Tragitto 2** impiega un tempo che dipende da x:

$$t_{tot} = t_{AP} + t_{PC} = T(x) = \frac{\sqrt{100+x^2}}{4} + \frac{20-x}{5}.$$

Con lo studio del segno della funzione

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{100+x^2}} - \frac{1}{5},$$

si ottiene l'unico punto di minimo relativo per la funzione $T(x)$

$$\frac{x}{4\sqrt{100+x^2}} - \frac{1}{5} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geq \bar{x} = \frac{40}{3},$$

da cui, tenendo conto che $T(0) = 6.5$ h e $T(20) = t_{AC} \approx 5,59$ h, si ricava

$$\min_{x\in[0,20]} T(x) = T(\bar{x}) = \frac{11}{2} = 5,50 \text{ h}.$$

Problema 24. Sia

$$f(x) = \log_3(2+x) + 3\frac{x+1}{x+4}.$$

a) Dimostrare che esiste almeno un punto x nel dominio di f tale che $f(x) = 0$.

b) Dimostrare che tale punto è unico.

c) Determinarlo.

Soluzione. a) Si procede con lo studio della funzione $f(x)$. Risulta

$$\text{dom} f = (-2, +\infty), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty.$$

Inoltre, la funzione $f(x)$ è continua nel suo dominio. Quindi,

$$\exists\ [a,b] \subset (-2,+\infty) : f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0.$$

Pertanto, $\exists\, x \in (a,b) : f(x) = 0$.

b) Per dimostrare che f ha un unico zero, si studia la crescenza. La derivata

$$f'(x) = \frac{1}{(2+x)\ln(3)} + \frac{9}{(x+4)^2}$$

risulta positiva $\forall x \in \text{dom} f$ e dunque strettamente crescente nel suo dominio. Pertanto, la funzione $f(x)$ ammette un unico zero.

c) Per determinare lo zero di $f(x)$ si osservi che entrambi i suoi addendi si annullano in $x = -1$.