Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 7 Aprile 2017
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 24 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I sei problemi numerati da 16 a 21, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 22, 23 e 24, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 10.

• Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 2** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. Un triangolo ABC è rettangolo in B e non è isoscele. Detta Γ la circonferenza di diametro il cateto BC, siano:

(1) D il secondo punto di intersezione di Γ con l'ipotenusa AC;

(2) F il punto di intersezione della tangente in D a Γ con il cateto BA.

Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa:

(A) $B\widehat{F}D = 2B\widehat{A}C$.

(B) $FD = FA$.

(C) DF biseca $B\widehat{D}A$.

(D) DF biseca BA.

(E) $FD = FB$.

Problema 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Esiste almeno un punto di minimo per f.

(B) Esiste almeno un punto di massimo per f.

(C) La funzione f interseca la retta $y = 0$ in almeno un punto.

(D) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 0$.

(E) Nessuna delle precedenti.

Problema 3. Individuare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{2^{\frac{1}{1-x}} - 4}.$$

(A) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(B) $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

(D) $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

[1] Dappertutto nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB); un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua i due segmenti che formano l'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); la lunghezza di un segmento è indicata con la sovralineatura sulle due lettere che individuano il segmento (ad esempio, $\overline{AB}$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x; $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri interi positivi: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

(E) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Problema 4. Il numero D degli interi dispari di tre cifre (in base 10) che si possono ottenere scegliendo senza ripetizione tre elementi dall'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ vale:

(A) 60.

(B) 6.

(C) 10.

(D) 24.

(E) 36.

Problema 5. Se $x^2 - x - 1 = 0$, allora il valore di $x^3 - 2x + 1$ è:

(A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(B) 0.

(C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(D) 2.

(E) Non è univocamente determinabile.

Problema 6. Il

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin n}{n} + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right]$$

vale:

(A) $+\infty$.

(B) 0.

(C) Non esiste.

(D) 1.

(E) π.

Problema 7. Nel triangolo ABC, con $B\widehat{C}A = 90°$, siano C_1 e C_2 i punti dell'ipotenusa AB tali che $AC_1 = AC$ e $BC_2 = BC$. Se $C_1\widehat{C}C_2 = x$, allora

(A) $x = 30°$.

(B) $30° < x < 45°$.

(C) $x = 45°$.

(D) $45° < x < 60°$.

(E) $x = 60°$.

Problema 8. Un atleta di categoria giovanile esegue un salto in lungo: dopo una rincorsa di 20 metri effettua il salto atterrando 4 metri più avanti con una traiettoria parabolica inclinata di 45 gradi alla partenza. A quale altezza massima arriva l'atleta?

(A) 2 m.

(B) 1 m.

(C) 0,5 m.

(D) 1,5 m.

(E) Non ci sono sufficienti dati per calcolare l'altezza massima.

Problema 9. Il periodo della funzione $f(x) = \cos 6x + \sin 4x$ è:

(A) 2π.

(B) π.

(C) $\pi/6$.

(D) $\pi/4$.

(E) $\pi/3$.

Problema 10. Data l'equazione $ax^2 + by^2 = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$, individuare l'affermazione corretta tra le seguenti:

(A) se $a = b$, l'equazione rappresenta una circonferenza solo se a, b, c sono concordi.

(B) se a e b sono discordi, l'equazione rappresenta un'ellisse.

(C) se $a > 0, b < 0, c > 0$, l'equazione rappresenta un'iperbole con i vertici sull'asse y.

(D) se a, b sono discordi e $|a| = |b|$, l'equazione rappresenta una iperbole equilatera.

(E) se a, b, c sono concordi, l'equazione rappresenta una circonferenza.

Problema 11. Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti ai numeri reali x e y, rispettivamente. La successione

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{(x_n + y_n) + |x_n - y_n|}{2}$$

converge a:

(A) $\min\{x, y\}$.

(B) x.

(C) y.

(D) $\max\{x, y\}$.

(E) $|x - y|$.

Problema 12. Siano A, B, C tre eventi relativi ad uno stesso esperimento casuale. La trasposizione in notazione insiemistica dell'evento

$$E : \text{“uno solo tra } A, B, C \text{ si verifica”}$$

è:[2]

(A) $E = A \cap B \cap C$.

[2] La sovralineatura rappresenta l'operazione del complemento.

(B) $E = A \cup B \cup C$.

(C) $E = (A \cap B) \cup C$.

(D) $E = (A \cup B \cup C) - (A \cup B \cup C)$.

(E) $E = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.

Problema 13. Quante sono le coppie ordinate (a, b) di numeri interi positivi tali che $a^3 - b^3 = 61$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

(E) Infinite.

Problema 14. Con a numero reale non negativo, il limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

vale:

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}a}$.

(B) 0.

(C) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

(D) $\sqrt{a}$.

(E) $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Problema 15. Un certo intero positivo a ha m cifre se scritto in base 3 ed $m + 1$ cifre se scritto in base 2. Il massimo valore di m è:

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

(E) 5.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Due cerchi, entrambi di raggio 1 sono tali che il centro di ciascuno si trova sulla circonferenza dell'altro. Quanto vale l'area dell'intersezione dei due cerchi?

Problema 17. Determinare la coppia ordinata (a, b) di numeri reali in maniera tale che la funzione $f(x) = ax + b$ verifichi la seguente condizione:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f\big[x_2 f(x_1 + x_2) + f(x_1)\big] = 4x_1 + 2x_2 f(x_1 + x_2).$$

Problema 18. Un paziente in ospedale ha una temperatura che varia tra un minimo di 37 °C ed un massimo di $40{,}4$ °C. Con a, A, ω numeri reali positivi, si supponga che la funzione che descrive la temperatura T in funzione del tempo t espresso in giorni sia del tipo:

$$T(t) = a + A\sin(\omega t).$$

Sapendo che il tempo che passa tra due successivi picchi di febbre è 16 giorni, si determini il valore della temperatura dopo 6 giorni dall'inizio della malattia.[3]

Problema 19. Determinare il dominio D della funzione

$$g(x) = \log_{1/2}\left[|1 - x|\frac{\arctan(2 - x)}{4x - 1}\right].$$

Problema 20. Uno sciatore effettua uno slalom su una pista rettilinea di 400 m. Egli, fin dalla partenza, passa intorno alle bandierine percorrendo semiellissi di eccentricità $\sqrt{2}/2$ ed i cui semiassi maggiori sono sulla linea delle bandierine (le quali si trovano nei centri). Inoltre, è noto che il rapporto delle lunghezze dei semiassi minori tra una delle semiellissi e quella precedente è costantemente uguale a 2. Sapendo che la prima bandierina si trova a 3 m dall'inizio della pista, quante bandierine deve superare lo sciatore per completare la discesa?

Problema 21. Determinare il più piccolo numero naturale n tale che $18n$ sia il successivo di un multiplo di 19.

[3] La risposta può essere anche espressa con arrotondamento sulla prima cifra decimale.

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 22. Nel triangolo ABC si indichino con A' il punto medio del lato BC (opposto ad A) e con B' il punto medio del lato AC (opposto a B). Si supponga che (in una data unità di misura): il triangolo ABC abbia area 36, la lunghezza di AA' sia 6 e quella di BB' sia 9. Determinare l'area del triangolo $A'B'C$, l'area del quadrilatero $ABA'B'$ e dimostrare che le due mediane AA' e BB' del triangolo ABC sono perpendicolari.

Problema 23. Si determini
$$l = \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1}.$$
Dopo di ciò, si dimostri che la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & x \neq 1 \\ l & x = 1, \end{cases}$$
è derivabile in $x = 1$.

Problema 24. Sia
$$a = \frac{(1+2+3+\cdots+62+63)^{2017}-2016}{2016^2+2017}.$$

(1) Calcolare $n = 1+2+3+\cdots+62+63$ (la somma dei primi 63 numeri naturali non nulli).

(2) Dimostrare che a è un intero.

(3) Dimostrare che l'intero a è un multiplo di 2017.

(4) Sapendo che

$$\begin{aligned}2017 &= 1+2^5\cdot 3^2\cdot 7 = 2+5\cdot 13\cdot 31 = \\ &= 4+3\cdot 11\cdot 61 = 11+2\cdot 17\cdot 59 = 3+2\cdot 19\cdot 53 = \\ &= 16+3\cdot 23\cdot 29 = 19+2\cdot 3^3\cdot 37 = 8+7^2\cdot 41 = \\ &= 39+2\cdot 23\cdot 43,\end{aligned}$$

e che
$$1936 = 44^2 < 2017 < 45^2 = 2025,$$

dimostrare 2017 è un numero primo somma di due quadrati.