Certamen Nazionale di Matematica "Renato Caccioppoli"

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"
Sezione napoletana della Mathesis "Aldo Morelli"
Liceo Scientifico Statale "Giuseppe Mercalli"

NAPOLI, 7 Aprile 2017
LSS "Giuseppe Mercalli"

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l'insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l'uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 24 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la "**Sezione A: problemi a risposta chiusa**", sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I sei problemi numerati da 16 a 21, che costituiscono la "**Sezione B: problemi a risposta aperta**", richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 22, 23 e 24, che costituiscono la "**Sezione C: problemi con dimostrazione**", richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 10.

• Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l'insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 2** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. Un triangolo ABC è rettangolo in B e non è isoscele. Detta Γ la circonferenza di diametro il cateto BC, siano:

(1) D il secondo punto di intersezione di Γ con l'ipotenusa AC;

(2) F il punto di intersezione della tangente in D a Γ con il cateto BA.

Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa:

(A) $B\widehat{F}D = 2B\widehat{A}C$.

(B) $FD = FA$.

(C) DF biseca $B\widehat{D}A$.

(D) DF biseca BA.

(E) $FD = FB$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Si faccia riferimento alla Figura 1. Posto $\alpha = B\widehat{A}C$ e $\gamma = B\widehat{C}A$, si ha $\alpha + \gamma = 90°$ con $\alpha \neq \gamma$

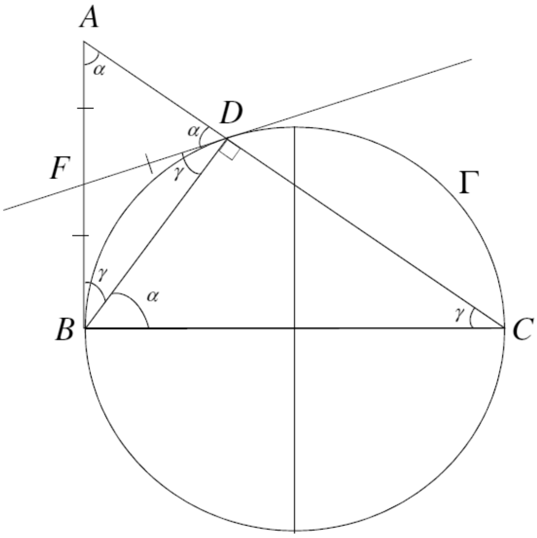

Figura 1: Ad illustrazione del Problema 1.

(perché ABC non è isoscele).
Avendo i lati ortogonali (il triangolo BCD è rettangolo in D), gli angoli $A\widehat{B}D$ e $B\widehat{C}D$ sono uguali, quindi $A\widehat{B}D = \gamma$ e, di conseguenza, $D\widehat{B}C = 90° - \gamma = \alpha$.
Essendo FD e FB tangenti a Γ condotte da uno stesso punto, è $FB = FD$; quindi il triangolo FBD è isoscele e così $B\widehat{D}F = \gamma$. Ne segue che $A\widehat{D}F = 90° - \gamma = \alpha$.
Poiché $\alpha \neq \gamma$, DF non è la bisettrice di $B\widehat{D}A$. I segni grafici e le lettere che indicano gli angoli nella Figura 1 mostrano che le altre affermazioni sono vere.

[1] Dappertutto nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB); un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua i due segmenti che formano l'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); la lunghezza di un segmento è indicata con la sovralineatura sulle due lettere che individuano il segmento (ad esempio, $\overline{AB}$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x; $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri interi: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Problema 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Esiste almeno un punto di minimo per f.

(B) Esiste almeno un punto di massimo per f.

(C) La funzione f interseca la retta $y = 0$ in almeno un punto.

(D) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq 0$.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (A).
Infatti, poiché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

esistono due numeri reali $a < b$ tali che

$$\begin{cases} x < a \implies f(x) > f(0), \\ x > b \implies f(x) > f(0). \end{cases} \tag{1}$$

Da ciò segue che $0 \in [a, b]$. Inoltre, essendo f continua e $[a, b]$ chiuso e limitato, esiste un punto x_0 di minimo per f in $[a, b]$; in particolare $f(x_0) \leq f(0)$. Tale punto risulta di minimo per f in tutto $\mathbb{R}$: se $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, da (1), segue:

$$f(x_0) \leq f(0) < f(x).$$

Problema 3. Individuare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{2^{\frac{1}{1-x}} - 4}.$$

(A) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(B) $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

(D) $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

(E) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, si deve imporre che

$$2^{\frac{1}{1-x}} - 4 \geq 0.$$

Risolvendo la disequazione esponenziale si ha:

$$2^{\frac{1}{1-x}} \geq 2^2 \iff \frac{1}{1-x} \geq 2 \iff \frac{2x-1}{1-x} \geq 0 \iff \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

Problema 4. Il numero D degli interi dispari di tre cifre (in base 10) che si possono ottenere scegliendo senza ripetizione tre elementi dall'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ vale:

(A) 60.

(B) 6.

(C) 10.

(D) 24.

(E) 36.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
Ci si concentri dapprima sulla coppia che individua le cifra delle centinaia e delle decine. Indicando con p e d, rispettivamente un pari e un dispari di S, si possono ottenere quattro tipi di coppie: (d, d), (p, p), (d, p) e (p, d). Tali tipi di coppie hanno un differente peso nel senso che, con la scelta di un ulteriore elemento di S, danno luogo ad un diverso numero di interi dispari con tre cifre. Inoltre, ogni tipo di coppia ha la sua numerosità. La tabella seguente riassume le informazioni necessarie per ottenere la soluzione:

tipo	numerosità	peso
(d, d)	$3 \cdot 2$	1
(p, p)	$2 \cdot 1$	3
(d, p)	$3 \cdot 2$	2
(p, d)	$2 \cdot 3$	2

Si osservi, a titolo di prova, che la somma delle numerosità è uguale al numero delle coppie (20) che si possono ottenere scegliendo senza ripetizione due elementi da S. Dopo di ciò

$$D = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 6 + 6 + 12 + 12 = 36.$$

Problema 5. Se $x^2 - x - 1 = 0$, allora il valore di $x^3 - 2x + 1$ è:

(A) $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

(B) 0.

(C) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

(D) 2.

(E) Non è univocamente determinabile.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Infatti si ha

$$x^3 - 2x + 1 = (x + 1)(x^2 - x - 1) + 2,$$

dalla quale segue che, quando $x^2 - x - 1 = 0$, $x^3 - 2x + 1$ assume il valore 2.

Problema 6. Il

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{\sin n}{n} + \left(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} \right) \right]$$

vale:

(A) $+\infty$.

(B) 0.

(C) Non esiste.

(D) 1.

(E) π.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
Infatti, $0 \leq \dfrac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}$ e poiché $\dfrac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$, allora anche $\dfrac{|\sin n|}{n}$ tende a zero per $n \to \infty$. Ne discende, che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Dopo di ciò:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin n}{n} + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} + \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

Problema 7. Nel triangolo ABC, con $B\widehat{C}A = 90°$, siano C_1 e C_2 i punti dell'ipotenusa AB tali che $AC_1 = AC$ e $BC_2 = BC$. Se $C_1\widehat{C}C_2 = x$, allora

(A) $x = 30°$.

(B) $30° < x < 45°$.

(C) $x = 45°$.

(D) $45° < x < 60°$.

(E) $x = 60°$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Posto $A\widehat{C}C_2 = y$ e $C_1\widehat{C}B = z$, si ha $x + y + z = 90°$. Ora, con riferimento alla Figura 2, risulta

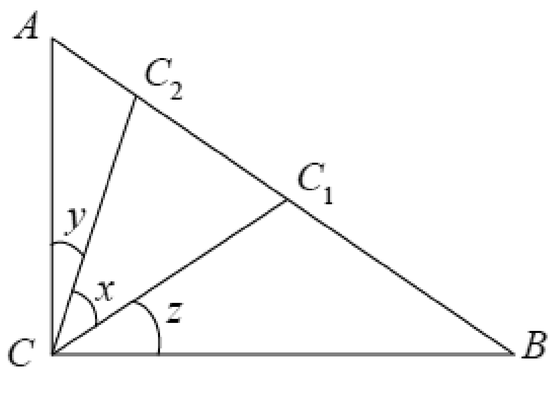

Figura 2: Ad illustrazione del Problema 7.

$$AC_1 = AC \Rightarrow C_2\widehat{C_1}C = A\widehat{C_1}C = A\widehat{C}C_1 = x + y$$

e

$$BC_2 = BC \Rightarrow C_1\widehat{C_2}C = B\widehat{C_2}C = B\widehat{C}C_2 = x + z.$$

Pertanto, nel triangolo C_1C_2C si ha:

$$180^\circ = C_1\widehat{C}C_2 + C_2\widehat{C_1}C + C_1\widehat{C_2}C = x + (x+y) + (x+z) = 2x + 90^\circ.$$

Dunque $2x = 90^\circ$ e $x = 45^\circ$.

Problema 8. Un atleta di categoria giovanile esegue un salto in lungo: dopo una rincorsa di 20 metri effettua il salto atterrando 4 metri più avanti con una traiettoria parabolica inclinata di 45 gradi alla partenza. A quale altezza massima arriva l'atleta?

(A) 2 m.

(B) 1 m.

(C) 0,5 m.

(D) 1,5 m.

(E) Non ci sono sufficienti dati per calcolare l'altezza massima.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
Ovviamente il punto di altezza massima coincide con il vertice della parabola. Si consideri un riferimento cartesiano tale che il punto in cui l'atleta spicca il salto sia $(-2, 0)$ e quello in cui atterra sia $(2, 0)$. In tal modo la traiettoria avrà equazione $y = ax^2 - 4a$ con $a < 0$ e $-4a$ ordinata del vertice, ossia il valore cercato. L'inclinazione di 45° nel punto $(-2, 0)$ conduce a dire che la tangente ha equazione $y = x + 2$. Imponendo la condizione di tangenza tra la parabola e la retta si ha: $ax^2 - x - 4a - 2 = 0$ con $\Delta_x = 0$, cioè $1 + 16a^2 + 8a = 0$ da cui $a = -1/4$. Quindi l'altezza massima vale 1 m.

Problema 9. Il periodo della funzione $f(x) = \cos 6x + \sin 4x$ è:

(A) 2π.

(B) π.

(C) $\pi/6$.

(D) $\pi/4$.

(E) $\pi/3$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
Infatti, il periodo di $\cos 6x$ è $\pi/3$ mentre il periodo di $\sin 4x$ è $\pi/2$. Dunque la funzione $f(x)$ è periodica e il suo periodo coincide con il minimo comune multiplo tra $\pi/3$ e $\pi/2$, cioè π.

Problema 10. Data l'equazione $ax^2 + by^2 = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$, individuare l'affermazione corretta tra le seguenti:

(A) se $a = b$, l'equazione rappresenta una circonferenza solo se a, b, c sono concordi.

(B) se a e b sono discordi, l'equazione rappresenta un'ellisse.

(C) se $a > 0, b < 0, c > 0$, l'equazione rappresenta un'iperbole con i vertici sull'asse y.

(D) se a, b sono discordi e $|a| = |b|$, l'equazione rappresenta una iperbole equilatera.

(E) se a, b, c sono concordi, l'equazione rappresenta una circonferenza.

Soluzione. La risposta corretta è la (A).
Infatti, se $a = b$, l'equazione diventa

$$x^2 + y^2 = \frac{c}{a}.$$

In tal caso, essa rappresenta (i) l'origine se $c = 0$, (ii) l'insieme vuoto se c è discorde da a , (iii) una circonferenza se c è concorde con a.
La (B) non è corretta in quanto per avere un'ellisse a, b devono essere concordi. La (C) non è corretta in quanto i vertici dell'iperbole si trovano sull'asse y. La (D) è non corretta nel caso di $c = 0$. La (E) non è corretta nel caso di $a \neq b$.

Problema 11. Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti ai numeri reali x e y, rispettivamente. La successione

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{(x_n + y_n) + |x_n - y_n|}{2}$$

converge a:

(A) $\min\{x, y\}$.

(B) x.

(C) y.

(D) $\max\{x, y\}$.

(E) $|x - y|$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Infatti basta osservare che si può scrivere $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}\left[(a + b) + |a - b|\right]$.

Problema 12. Siano A, B, C tre eventi relativi ad uno stesso esperimento casuale. La trasposizione in notazione insiemistica dell'evento

E : "uno solo tra A, B, C si verifica"

è:[2]

(A) $E = A \cap B \cap C$.

(B) $E = A \cup B \cup C$.

(C) $E = (A \cap B) \cup C$.

(D) $E = (A \cup B \cup C) - (A \cup B \cup C)$.

(E) $E = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
Infatti, la trasposizione evento - insieme fa si che che per verificarsi E il risultato dell'esperimento casuale debba appartenere ad uno degli insiemi A, B, C e non agli altri due.

Problema 13. Quante sono le coppie ordinate (a, b) di numeri interi positivi tali che $a^3 - b^3 = 61$?

(A) 0.

(B) 1.

[2] La sovralineatura rappresenta l'operazione del complemento.

(C) 2.

(D) 3.

(E) Infinite.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
Siccome $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = 61$ che è numero primo e $(a^2+ab+b^2) \neq 1$ allora $a-b=1$, cioè a e b sono interi consecutivi. (Dall'essere a^2+ab+b^2 crescente nelle due variabili è già chiaro che la risposta è 0 oppure 1). D'altra parte $a^2+ab+b^2 = 61$ implica $a^2 < 61$, quindi $a < 8$. Ora si può procedere per prove alcune delle quali sono ovviamente superflue. Oppure, più formalmente, si sostituisce $b = a-1$ e si ottiene $a = 5$ (ovviamente, $a = -4$ da scartare). Dunque esiste un'unica coppia di numeri naturali che verifica la condizione richiesta.

Problema 14. Con a numero reale non negativo, il limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

vale:

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

(B) 0.

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

(D) $\sqrt{a}$.

(E) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \lim_{x\to a^+} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}} \\
&= \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}} + \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}} \\
&= \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}}\,\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + \lim_{x\to a^+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\
&= \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.
\end{aligned}$$

Problema 15. Un certo intero positivo a ha m cifre se scritto in base 3 ed $m+1$ cifre se scritto in base 2. Il massimo valore di m è:

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

(E) 5.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Sia
$$a = (a_m a_{m-1} \dots a_0)_2 = (c_{m-1} c_{m-2} \dots c_0)_3,$$
con $a_i \in \{0,1\}$, $a_m = 1$, $c_i \in \{0,1,2\}$, $c_{m-1} \neq 0$.
Allora
$$2^m \leq a \leq 2^{m+1} - 1 \qquad \text{e} \qquad 3^{m-1} \leq a \leq 3^m - 1,$$
da cui segue
$$3^{m-1} \leq 2^{m+1} - 1. \tag{2}$$
Il massimo valore di m per cui vale la (2) è $m = 4$.
D'altra parte $31 = (11111)_2 = (1011)_3$ e con 4 cifre in base 3 si possono rappresentare gli interi fino a $80 = (2222)_3$ che, invece, in base 2 ha bisogno di 7 cifre: $80 = (101000)_2$.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Due cerchi, entrambi di raggio 1 sono tali che il centro di ciascuno si trova sulla circonferenza dell'altro. Quanto vale l'area dell'intersezione dei due cerchi?

Soluzione. Con riferimento alla Figura 3, sia C la seconda intersezione con γ_2 della retta per O_1 e O_2. Il triangolo ABC è equilatero e iscritto in γ_2. AD è altezza del triangolo equilatero AO_1O_2

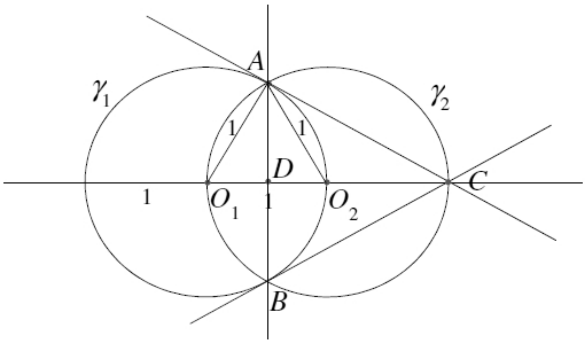

Figura 3: Ad illustrazione del Problema 16.

di lato 1, quindi $|AD| = \sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ e così

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}|AB|\cdot|DC| = |AD|\cdot|DC| = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Inoltre, $\text{Area}(\mathring{\gamma}_2) = \pi$. Dunque,

$$\text{Area}(\mathring{\gamma}_1 \cap \mathring{\gamma}_2) = \frac{1}{3}\Big[\text{Area}(\mathring{\gamma}_2) - \text{Area}(ABC)\Big]\cdot 2 = \frac{2}{3}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} \approx 1{,}23.$$

Problema 17. Determinare la coppia ordinata (a,b) di numeri reali in maniera tale che la funzione $f(x) = ax+b$ verifichi la seguente condizione:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f\big[x_2 f(x_1+x_2) + f(x_1)\big] = 4x_1 + 2x_2 f(x_1+x_2).$$

Soluzione. Sostituendo la specifica lineare di f, la condizione si riscrive nella forma:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad a^2x_1 + a^2(x_2^2 + x_1x_2) + abx_2 + b(a+1) = 4x_1 + 2a(x_2^2 + x_1x_2) + 2bx_2.$$

Ne risulta che $b = 0$ in quanto al secondo membro manca il termine non dipendente da x_1 e x_2. L'uguaglianza del termine in x_1 al primo e al secondo membro conduce a $a^2 = 4$; dopo di ciò l'uguaglianza del termine in x_2^2 comporta che $a = 2$.

In alternativa si può procedere al seguente modo. Per $x_2 = 0$ si ottiene

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f[f(x)] = 4x,$$

cosicché, per $x_2 = 1$ si ha:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad f[f(x+1)+f(x)] = 4x + 2f(x+1)\\
\iff &\forall x \in \mathbb{R}, \quad f[f(x+1)] + f[f(x)] = 4x + 2f(x+1)\\
\iff &\forall x \in \mathbb{R}, \quad f[f(x+1)] + 4x = 4x + 2f(x+1)\\
\iff &\forall x \in \mathbb{R}, \quad f[f(x+1)] = 2f(x+1) \iff 4(x+1) = 2f(x+1)\\
\iff &\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = 2(x+1).
\end{aligned}$$

In definitiva, $f(x) = 2x$ e $(a,b) = (2,0)$.

Problema 18. Un paziente in ospedale ha una temperatura che varia tra un minimo di 37 °C ed un massimo di $40{,}4$ °C. Con a, A, ω numeri reali positivi, si supponga che la funzione che descrive la temperatura T in funzione del tempo t espresso in giorni sia del tipo:

$$T(t) = a + A\sin(\omega t).$$

Sapendo che il tempo che passa tra due successivi picchi di febbre è 16 giorni, si determini il valore della temperatura dopo 6 giorni dall'inizio della malattia.[3]

Soluzione. La funzione T assume il valore massimo $a + A$ quando la funzione seno vale 1 e assume il valore minimo $a - A$ quando il seno vale -1. Quindi

$$\begin{cases} a + A = 40{,}4\ ^\circ\mathrm{C} \\ a - A = 37\ ^\circ\mathrm{C} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 38{,}7\ ^\circ\mathrm{C} \\ A = 1{,}7\ ^\circ\mathrm{C}. \end{cases}$$

Inoltre, essendo 16 il periodo di T deve essere $16\omega = 2\pi \iff \omega = \pi/8$. In definitiva:

$$T(6) = \left(38{,}7 + 1{,}7\sin\frac{3\pi}{4}\right)\ ^\circ\mathrm{C} = \left(38{,}7 + 1{,}7\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ^\circ\mathrm{C} \approx 39{,}9\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Problema 19. Determinare il dominio D della funzione

$$g(x) = \log_{1/2}\left[|1 - x|\frac{\arctan(2 - x)}{4x - 1}\right].$$

Soluzione. Imponendo all'argomento del logaritmo di essere positivo si ottiene:

$$\begin{cases} 1 - x \neq 0 \\ \dfrac{\arctan(2 - x)}{4x - 1} > 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - x \neq 0 \\ \dfrac{2 - x}{4x - 1} > 0. \end{cases}$$

Ne segue che

$$D = \left]\frac{1}{4}, 1\right[\cup]1, 2[.$$

Problema 20. Uno sciatore effettua uno slalom su una pista rettilinea di 400 m. Egli, fin dalla partenza, passa intorno alle bandierine percorrendo semiellissi di eccentricità $\sqrt{2}/2$ ed i cui semiassi maggiori sono sulla linea delle bandierine (le quali si trovano nei centri). Inoltre, è noto che il rapporto delle lunghezze dei semiassi minori tra una delle semiellissi e quella precedente è costantemente uguale a 2. Sapendo che la prima bandierina si trova a 3 m dall'inizio della pista, quante bandierine deve superare lo sciatore per completare la discesa?

Soluzione. Per $i \geq 1$, siano a_i, b_i i semiassi rispettivamente maggiori e minori delle ellissi e c_i la semidistanza focale. Dai dati del problema è noto che:

$$a_1 = 3, \quad \text{e per } i \geq 1, a_i = \sqrt{2}c_i \quad \text{e} \quad \frac{b_{i+1}}{b_i} = 2.$$

Dopo di ciò, dall'essere

$$\forall i \geq 1, b_i^2 = a_i^2 - c_i^2 = c_i^2 \iff b_i = c_i,$$

ne discende che:

$$\forall i \geq 1, a_i = \sqrt{2}b_i \Rightarrow \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{\sqrt{2}b_{i+1}}{\sqrt{2}b_i} = 2.$$

In definitiva

$$\forall i \geq 1, a_i = 3 \cdot 2^{i-1}. \tag{3}$$

Tenendo conto che la distanza tra due bandierine equivale alla somma dei semiassi maggiori di due semiellissi consecutive, la (3) consente di scrivere la posizione (in metri) delle bandierine rispetto alla linea di partenza:

[3] La risposta può essere anche espressa con arrotondamento sulla prima cifra decimale.

bandierina	posizione
1	3
2	$3 + (3 + 6) = 12$
3	$12 + (6 + 12) = 30$
4	$30 + (12 + 24) = 66$
5	$66 + (24 + 48) = 138$
6	$138 + (48 + 96) = 282$
7	$282 + (96 + 192) = \mathbf{570}$

Se ne conclude che prima della linea del traguardo posta a 400 m dalla linea di partenza ci sono 6 bandierine.

Più formalmente, tenendo conto della (3), si noti che

$$\begin{aligned}\forall i \geq 1, d_i &= a_1 + (a_1 + a_2) + \cdots + (a_{i-1} + a_i) + a_i \\ &= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}) + a_i \\ &= 6(1 + 2 + \cdots + 2^{i-2}) + 3 \cdot 2^{i-1} \\ &= 6(2^{i-1} - 1) + 3 \cdot 2^{i-1} \\ &= 9 \cdot 2^{i-1} - 6.\end{aligned}$$

dove con d_i è stata indicata la distanza percorsa dallo sciatore fino alla bandierina i-ma. La posizione j della bandierina che si troverebbe ad essere posizionata oltre la linea di arrivo è fornita dal numero intero più piccolo soluzione della disequazione

$$9 \cdot 2^{i-1} - 6 > 400 \iff i \geq \log_2 \frac{406}{9} + 1,$$

ossia $j = 7$. Ci sono allora 6 bandierine tra la linea di partenza e quella di arrivo.

Problema 21. Determinare il più piccolo numero naturale n tale che $18n$ sia il successivo di un multiplo di 19.

Soluzione. Affinché sia soddisfatta la condizione deve esistere un altro numero naturale m per il quale risulti:

$$18n = 19m + 1 \iff 18(n - m) = m + 1.$$

Quindi m deve essere il precedente di un multiplo di 18. Per $m = 17$ si ottiene il valore di n desiderato:

$$n = \frac{19 \cdot 17 + 1}{18} = 18.$$

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 22. Nel triangolo ABC si indichino con A' il punto medio del lato BC (opposto ad A) e con B' il punto medio del lato AC (opposto a B). Si supponga che (in una data unità di misura): il triangolo ABC abbia area 36, la lunghezza di AA' sia 6 e quella di BB' sia 9. Determinare l'area del triangolo $A'B'C$, l'area del quadrilatero $ABA'B'$ e dimostrare che le due mediane AA' e BB' del triangolo ABC sono perpendicolari.

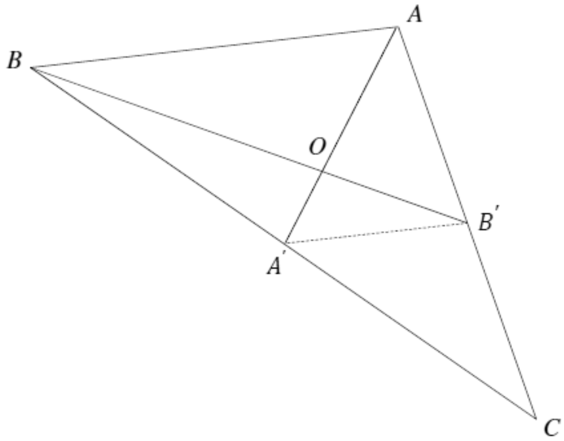

Figura 4: Ad illustrazione del Problema 22.

Soluzione. Con riferimento alla Figura (4), si ha:

$$CB' = AB' \Rightarrow \text{Area}(A'B'C) = \frac{1}{2}\text{Area}(AA'C),$$
$$CA' = A'B \Rightarrow \text{Area}(AA'C) = \frac{1}{2}\text{Area}(ABC),$$

e di conseguenza:

$$\text{Area}(A'B'C) = \frac{1}{4}\text{Area}(ABC) = 9 \quad \text{e} \quad \text{Area}(ABA'B') = 27.$$

Per assurdo, supponiamo che AA' e BB' non siano perpendicolari. Sia $O = AA' \cap BB'$. Allora l'altezza del triangolo ABB' relativa al lato BB' avrà lunghezza minore di quella di AO e, analogamente, l'altezza del triangolo $BB'A'$ relativa al lato BB' avrà lunghezza minore di quella di $A'O$. Dunque

$$\text{Area}(ABB') < \frac{1}{2}|AO||BB'|, \quad \text{Area}(BB'A') < \frac{1}{2}|A'O||BB'|.$$

e di conseguenza si giunge all'assurdo che:

$$\begin{aligned}\text{Area}(ABA'B') &< \frac{1}{2}\left(|AO| + |A'O|\right) \cdot |BB'| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \\ &= 27.\end{aligned}$$

Problema 23. Si determini

$$l = \lim_{x \to 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{x - 1}.$$

Dopo di ciò, si dimostri che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & x \neq 1 \\ l & x = 1, \end{cases}$$

è derivabile in $x = 1$.

Soluzione. Con il cambiamento di variabile $y = x - 1$ si ha:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2[\pi(y+1)]}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(\pi y)}{y} = \lim_{y\to 0} \pi^2 y \frac{\sin^2(\pi y)}{(\pi y)^2} \\ &= \pi^2 \lim_{y\to 0} y \left[\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right]^2 = \pi^2 \lim_{y\to 0} y \lim_{y\to 0} \left[\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right]^2 = \pi^2 \lim_{y\to 0} y \left[\lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right]^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il limite del rapporto incrementale della funzione f in $x = 1$ esiste ed è finito:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2[\pi(1+h)]}{h} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(\pi h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \pi^2 \frac{\sin^2(\pi h)}{\pi^2 h^2} \\ &= \pi^2 \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sin(\pi h)}{\pi h}\right]^2 = \pi^2. \end{aligned} \tag{4}$$

In definitiva, la (4) asserisce che $f'(1) = \pi^2$.

Problema 24. Sia

$$a = \frac{(1+2+3+\cdots+62+63)^{2017} - 2016}{2016^2 + 2017}.$$

(1) Calcolare $n = 1+2+3+\cdots+62+63$ (la somma dei primi 63 numeri naturali non nulli).

(2) Dimostrare che a è un intero.

(3) Dimostrare che l'intero a è un multiplo di 2017.

(4) Sapendo che

$$\begin{aligned} 2017 = 1 + 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2 + 5 \cdot 13 \cdot 31 = \\ = 4 + 3 \cdot 11 \cdot 61 = 11 + 2 \cdot 17 \cdot 59 = 3 + 2 \cdot 19 \cdot 53 = \\ = 16 + 3 \cdot 23 \cdot 29 = 19 + 2 \cdot 3^3 \cdot 37 = 8 + 7^2 \cdot 41 = \\ = 39 + 2 \cdot 23 \cdot 43, \end{aligned}$$

e che

$$1936 = 44^2 < 2017 < 45^2 = 2025,$$

dimostrare 2017 è un numero primo somma di due quadrati.

Soluzione. (1) In ogni colonna della tabella

1	2	3	$\cdots$	61	62	63
63	62	61	$\cdots$	3	2	1

la somma dei due numeri è 64. Dunque $2n = 63 \cdot 64$ e quindi

$$n = 32 \cdot 63 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016.$$

(2) Posto $n = 2016$, la frazione data diviene

$$a = \frac{n^{n+1} - n}{n^2 + (n+1)} = \frac{n(n^n - 1)}{n^2 + n + 1}.$$

Si osservi che n è un multiplo di 3: $n = 3m$ con $m = 672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$. Per cui, posto $b = n^3$, si può scrivere:

$$n^n - 1 = (n^3)^m - 1 = b^m - 1 = (b-1)c,$$

dove

$$c = 1 + b + b^2 + \ldots + b^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} b^i. \tag{5}$$

Ma

$$b - 1 = n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)),$$

e dunque

$$a = n(n-1)c \tag{6}$$

è un intero.

(3) Poiché $m - 1 = 671$, nella somma (5) vi è un numero pari di addendi (672) e quindi è possibile associare il primo e il secondo addendo, il terzo e il quarto addendo, ..., il penultimo e l'ultimo addendo; ognuna di queste somme di due addendi consecutivi si può scrivere (mettendo in evidenza la più piccola potenza di b) come prodotto di una potenza di b per $(1 + b)$. Dunque la somma (5) è un multiplo di $1 + b = 1 + n^3 = (n+1)(n^2 - n + 1)$ e quindi di $n + 1 = 2017$. Più formalmente:

$$c = \sum_{i=0}^{m-1} b^i = \sum_{i=0}^{671} b^i = \sum_{i=0}^{335} b^{2i} + \sum_{i=0}^{335} b^{2i+1} = \sum_{i=0}^{335} b^{2i} + b \sum_{i=0}^{335} b^{2i} =$$
$$= (1+b) \sum_{i=0}^{335} b^{2i} = (1 + n^3) \sum_{i=0}^{335} b^{2i} = (n+1)(n^2 - n + 1) \sum_{i=0}^{335} b^{2i}.$$

Per la (6), lo stesso si può dire per l'intero a.

(4) Se 2017 non fosse primo, si avrebbe $2017 = uv$, con $1 < u \leq v$, e quindi 2017 sarebbe divisibile per qualche primo minore di $u \leq \lfloor \sqrt{2017} \rfloor = 44$.[4] Ma le relazioni date mostrano che 2017 non è divisibile per nessuno dei 14 primi minori di 44. Dunque 2017 è un numero primo. Inoltre, avendosi $2017 - 44^2 = 2017 - 1936 = 81 = 9^2$, è somma di due quadrati.

[4] Se x è un numero reale positivo, $\lfloor x \rfloor$ fornisce la sua parte intera.