LSS "Giuseppe Mercalli"

Prova di selezione interna per il VII certamen nazionale di matematica "Renato Caccioppoli"

NAPOLI, 17 Febbraio 2017
Tempo a disposizione: 2 ore

AVVERTENZE

• Non sfogliare la prova fino a quando l'insegnante non ti dice di farlo.

• Non è ammesso l'uso di calcolatrici programmabili, libri di testo e tavole numeriche.

• Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.

• La prova consiste di 8 quesiti; risolvi i quesiti sui fogli che ti sono stati consegnati. Se hai bisogno di altri fogli rivolgiti ai docenti.

• Ti saranno consegnate una busta grande e una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da inserire nella busta piccola. Al momento della consegna della prova, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fogli con le soluzioni dei quesiti e busta piccola) saranno inseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

Quesito n.1

Calcola, se esiste, un numero naturale n per il quale risulti $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1048576$

Soluzione:

dalla formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ \ ponendo\ a = b = 1\ si\ ha$$

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \text{ cioè } 2^n = 1048576 \Longrightarrow n = 20$$

Quesito n.2

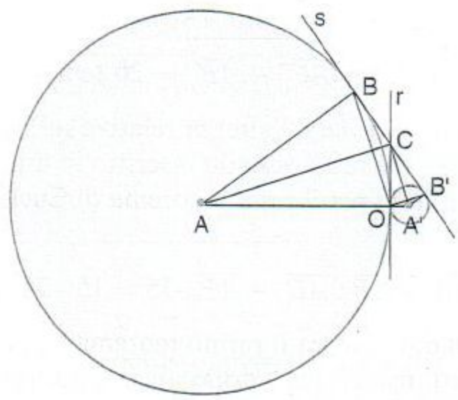
Si considerino due circonferneze di centri A ed A' e, rispettivamente, di raggi 9 ed 1, tangenti esternamente nel punto O.

Sia r la tangente comune in O ed s una retta tangente ad entrambe le circonferenze rispettivamente nei punti B e B'.

Detto C il punto di intersezione delle rette r ed s, si dimostri che i triangoli ACA' e BOB' sono rettangoli e si calcoli il rapporto delle loro aree.

Soluzione:

Per la proprietà delle tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno CA è bisettrice dell'angolo $B\widehat{C}O$ e CA' lo è dell'angolo $O\widehat{C}B'$. Poiché $B\widehat{C}O$ e $O\widehat{C}B'$ sono adiacenti, l'angolo formato dalle loro bisettrici è retto e il triangolo ACA' risulta rettangolo.
I triangoli BOB' e ACA' sono simili perché hanno due angoli congruenti; infatti:



- $C\widehat{B}O$ è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $BO \rightarrow C\widehat{B}O \cong \frac{1}{2} B\widehat{A}O \cong C\widehat{A}O$
- $C\widehat{B'}O$ è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $B'O \rightarrow C\widehat{B'}O \cong \frac{1}{2} B'\widehat{A'}O \cong C\widehat{A'}O$, quindi anche il triangolo BOB' è rettangolo.

Il rapporto di similitudine fra i triangoli ACA' e BOB' è $\frac{AA'}{BB'}$.
Sempre per la proprietà delle tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno si ha:

$$BC \cong CO \cong CB' \rightarrow BB' \cong 2\,OC$$

e, per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo ACA',

$$AO : OC = OC : OA' \rightarrow \overline{OC} = \sqrt{\overline{AO} \cdot \overline{OA'}} = \sqrt{9 \cdot 1} = 3$$

Si ha quindi: $\frac{AA'}{BB'} = \frac{9+1}{2 \cdot 3} = \frac{5}{3}$ e il rapporto tra le aree è $\frac{A_{ACA'}}{A_{BOB'}} = \left(\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$.

Quesito n.3

Si determinino tutte le coppie *(x,y)* di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$$

Soluzione:

Osserviamo innanzitutto che deve essere x>6 e y>6. Pertanto poniamo ***x=6+a*** *e* ***y=6+b,*** con a,b$\in N-\{0\}$. L'equazione diventa $\frac{1}{6+a}+\frac{1}{6+b}=\frac{1}{6}$ che risolta dà $a\cdot b=36$ le cui soluzioni sono:

a=1 b=36

a=2 b=18

a=3 b=12

a=4 b=9

a=6 b=6

e viceversa. Si ricava quindi che le coppie *(x,y)* di interi positivi che soddisfano l'equazione data sono:

(7; 42) , (8; 24) , (9; 18) , (10; 15) , (12; 12) e viceversa

Quesito n.4

In un piano, riferito a un Sistema di assi cartesiani Oxy sono assegnate le parabole di equazione:

$$y=(\,a-1)x^2-2ax+a^2$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no;
trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a;
stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no fornendo una esauriente spiegazione della risposta;
scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate.

Soluzione:

a) Se una parabola ha punti in comune con l'asse x, il sistema $\begin{cases} y=(a-1)x^2-2ax+a^2 \\ y=0 \end{cases}$, con $a \neq 1$, deve avere soluzioni reali, quindi l'equazione $(a-1)x^2-2ax+a^2=0$ deve avere il discriminante non negativo: $\frac{\Delta}{4}=a^2-a^2(a-1)\geq 0 \rightarrow a^2-a^3+a^2\geq 0 \rightarrow 2a^2-a^3\geq 0 \rightarrow a^2(2-a)\geq 0 \rightarrow a\leq 2$

Quindi per $(a\leq 2)\wedge(a\neq 1)$ le parabole hanno punti in comune con l'asse x, per $a>2$ non ne hanno.

b) Il vertice della parabola $y=Ax^2+Bx+C$ ha coordinate $V\left(-\frac{B}{2A};-\frac{B^2-4AC}{4A}\right)$.

Se $x_V=a$, deve essere $\frac{2a}{2(a-1)}=a \rightarrow a=a^2-a \rightarrow 2a-a^2=0 \rightarrow a(2-a)=0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$

Le due parabole hanno equazioni: $\left\langle \begin{array}{l} y=-x^2 \\ y=x^2-4x+4 \rightarrow y=(x-2)^2 \end{array}\right.$

c) Le due parabole sono congruenti perché l'equazione della seconda si può scrivere $y=(2-x)^2$ e si ottiene dalla prima mediante la simmetria centrale con centro in $C(1;0)$ di equazioni

$$\begin{cases} x'=2-x=2\cdot 1-x \\ y'=-y=2\cdot 0-y \end{cases}$$

d) Il luogo geometrico L ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=x_V=\dfrac{2a}{2(a-1)} \\ y=y_V=\dfrac{-4a^2+4a^2(a-1)}{4(a-1)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{(a-1)} \\ y=\dfrac{a^2(a-2)}{a-1} \end{cases}$$

e la sua equazione cartesiana si ottiene eliminando dal sistema il parametro a.

Si ricava quindi a dalla prima equazione: $ax-x-a=0 \rightarrow a=\frac{x}{x-1}$, con $x\neq 1$, e lo si sostituisce nella seconda:

$$y=\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\left(\frac{x}{x-1}-2\right)}{\frac{x}{x-1}-1} \rightarrow y=\frac{\frac{x^2}{(x-1)^2}\cdot\frac{-x+2}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} \rightarrow y=\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}$$

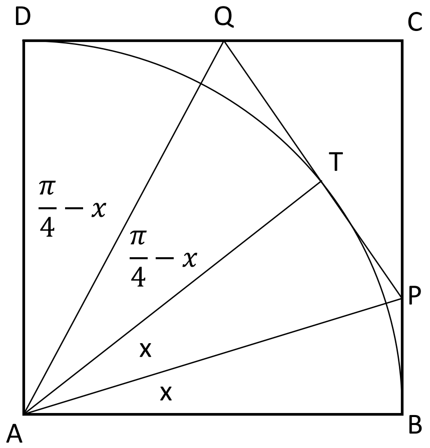
Quesito n.5

Considerato il quadrato $ABCD$ di lato l, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri $2x$ in radianti. Si conduca quindi per T la tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente. Esprimere in funzione di x il rapporto

$$f(x)=\frac{\overline{CP}+\overline{CQ}}{\overline{AT}}$$

e calcolarne il limite per T che tende a B sull'arco considerato.

Soluzione:



$\overline{AB} = l$

$T\hat{A}B = 2x \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

$D\hat{A}T = \frac{\pi}{2} - 2x$

$\overline{TP} = \overline{PB}$ tangenti condotte da P

$\overline{QT} = \overline{DQ}$ tangenti condotte da Q

I triangoli TPA e PBA sono congruenti. I triangoli QDA e QTA sono congruenti.

$\overline{PB} = \overline{AB}\, tgx = l\, tgx$

$\overline{CP} = \overline{CB} - \overline{PB} = l - l\, tgx$

$\overline{DQ} = \overline{DA}\, tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = l\, tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$\overline{QC} = \overline{DC} - \overline{DQ} = l - l\, tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

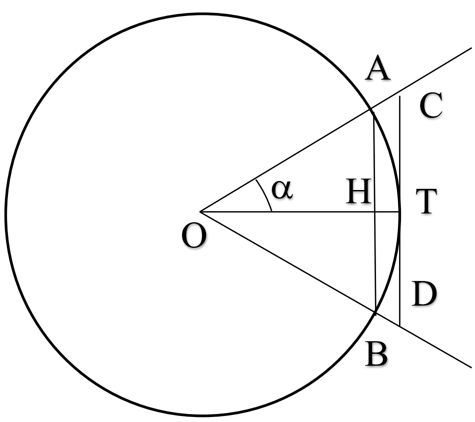
$f(x) = \frac{\overline{CP}+\overline{CQ}}{\overline{AT}} = \frac{l - l\, tgx + l - l\, tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{l} = 2 - tgx - tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$\lim_{T\to B} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2 - tgx - tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$

Quesito n.6

Si consideri una circonferenza e si inscriva in essa un poligono regolare di n lati, calcolare il perimetro di questo generico poligono. Si calcoli inoltre il perimetro del poligono regolare con n lati, circoscritto alla circonferenza con i lati paralleli ai lati del poligono inscritto. Dimostrare che al tendere all'infinito del numero di lati di ambedue i poligoni si ottiene la lunghezza della circonferenza.

Soluzione:



Sia $\alpha = \frac{\pi}{n}$, $AOB = \frac{2\pi}{n}$, AB il lato del poligono di n lati inscritto e CD il lato del poligono di n lati circoscritto. Si ha

$$AB = 2AH = 2r\, sen\frac{\pi}{n} \qquad\qquad CD = 2CT = 2r\, tg\frac{\pi}{n}$$

Indicato con p_n il perimetro del poligono inscritto, con P_n il perimetro del poligono circoscritto e con C la lunghezza della circonferenza si ha:

$$p_n = nAB = n2r\, sen\frac{\pi}{n} \qquad\qquad P_n = nCD = n2r\, tg\frac{\pi}{n}$$

$$p_n < C < P_n$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} 2rn\, sen\frac{\pi}{n} = 2r\lim_{n\to\infty}\pi\frac{sen\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r$$

$$\lim_{n\to\infty} 2rn\, tg\frac{\pi}{n} = 2r\lim_{n\to\infty}\pi\frac{tg\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r$$

Dal teorema del confronto si ha $C = 2\pi r$

Quesito n.7

Trova per quali valori reali dei parametri a e b la funzione $f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \sin(\pi x) & per\ x > 0 \\ ax + b & per\ x \leq 0 \end{cases}$$

- è continua e derivabile su tutto l'asse reale
- calcolati i valori, individua le coordinate del punto di intersezione tra le tangenti al grafico di $f(x)$ nei punti di ascissa $-\sqrt{2}$ e $\frac{1}{2}$

Soluzione:

Dominio: $f(x): \forall x \in R$

CONTINUITA': $x = 0 \quad f(0) = b$

$$\lim_{x\to 0^-} ax + b = b \qquad \lim_{x\to 0^+}(x^2 + sen\pi x) = 0$$

La funzione è continua $\forall x \in R$ se $b = 0$

DERIVABILITA':

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + \pi\cos(\pi x) & per\ x > 0 \\ a & per\ x \leq 0 \end{cases}$$

Dominio $f'(x)$: $\forall x \in R$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x + \pi\ cos\pi x) = \pi$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} a = a$$

La funzione è derivabile $\forall x \in R$ se $a = \pi$

$x_0 = -\sqrt{2} \rightarrow f(x_0) = -\sqrt{2}\pi \qquad f'(x_0) = \pi$

T_1: $\quad y + \sqrt{2}\pi = \pi\left(x + \sqrt{2}\right) \rightarrow y = \pi x + \pi\sqrt{2} - \pi\sqrt{2} \rightarrow y = \pi x$

$$x_1 = \tfrac{1}{2} \rightarrow f(x_1) = \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{5}{4} \quad f'(x_1) = 1$$

T_2: $\quad y - \frac{5}{4} = x - \frac{1}{2} \rightarrow y = x + \frac{3}{4}$

$$T_1 \cap T_2 : \begin{cases} y = x + \frac{3}{4} \\ y = \pi x \end{cases} \rightarrow \pi x = x + \frac{3}{4} \rightarrow x(\pi - 1) = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{3}{4(\pi - 1)}$$

$$y = \frac{3}{4(\pi - 1)} + \frac{3}{4} = \frac{3 + 3\pi - 3}{4(\pi - 1)}$$

$$P\left(\frac{3}{4(\pi - 1)}; \frac{3\pi}{4(\pi - 1)}\right)$$

Quesito n.8

Disegnare il grafico della curva algebrica di sesto grado

$$x^6 + y^6 = x^2$$

determinando il suo unico punto singolare.

Soluzione:

Si tratta della famosa curva algebrica della farfalla. Per disegnare il grafico basta riscrivere l'equazione della curva come due funzioni simmetriche rispetto all'asse x:

$$y = \pm\sqrt[6]{x^2 - x^6}$$

Il dominio è l'intervallo [-1;1] , le funzione sono pari e di segno costante. La derivata è:

$$y' = \pm\frac{2x - 6x^5}{6\sqrt[6]{(x^2 - x^6)^5}}$$

che non è definita in zero ma tende all'infinito al tendere di x a zero. Il punto di coordinate (0;0) è quindi l'unico punto singolare della curva