Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 5 Aprile 2019
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 24 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I sei problemi numerati da 16 a 21, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 22, 23 e 24, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 10.

- Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 2** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. Dato

$$n = 2^{200} + 2^{199} - 2^{194} - 2^{193} + 2^{11} + 2^{10} - 2^5 + 1,$$

siano $q = 1 + 3 \times 2^{188}$ il quoziente ed $r = 1025$ è il resto della divisione di n per l'intero positivo x. Ma quanto vale x?

(A) 2015.

(B) 2016.

(C) 2017.

(D) 2018.

(E) 2019.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
Infatti

$$r = 1025 = 2^{10} + 1$$

e

$$2^{200} + 2^{199} - 2^{194} - 2^{193} + 2^{11} + 2^{10} - 2^5 + 1 = n = xq + r = xq + 2^{10} + 1.$$

Dunque, semplificando, si ha

$$xq = 2^{200} + 2^{199} - 2^{194} - 2^{193} + 2^{11} - 2^5 = 2^5 \left(2^{195} + 2^{194} - 2^{189} - 2^{188} + 2^6 - 1\right)$$

e, poiché q è dispari, 2^5 divide x. Ora, dei cinque numeri proposti, tre sono dispari e uno dei due pari (2018) non è divisibile per 4. Pertanto, $x = 2016$. [D'altra parte $2016 = 2000 + 16 = 2^4 \times (5^3 + 1) = 2^5 \times 3^2 \times 7$].

Problema 2. Sia r la retta di equazione $x = 1$ e sia P un punto non appartenente ad essa. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Esistono esattamente due parabole di asse r passanti per P.

(B) Esiste un'unica parabola di asse r passante per P.

(C) Esistono infinite parabole di asse r passanti per P.

(D) Esistono esattamente tre parabole di asse r e vertice P.

(E) Non esistono parabole di asse r passanti per P.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, il passaggio per un punto impone una condizione all'equazione della parabola così come il fatto che essa deve avere l'asse assegnato. Quindi, uno dei parametri dell'equazione della parabola è libero di assumere un qualsiasi valore reale.

---

[1]Nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento orientato è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB è il segmento orientato da A verso B); un segmento non orientato è indicato sovralineando il simbolo del segmento orientato (ad esempio, $\overline{AB}$); la lunghezza di un segmento è indicata racchiudendo il segmento (orientato o meno) tra una coppia di linee verticali (ad esempio, $|AB|$ oppure $|\overline{AB}|$); un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua il vertice dell'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); per il triangolo si userà anche la convenzione di far precedere la sequenza dei tre vertici dal simbolo Δ (ad esempio, il triangolo ΔABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x; $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Ulteriori indicazioni o chiarimenti saranno dati come nota (a pié pagina) al corrispondente problema.

Problema 3. La probabilità che si verifichi almeno uno tra due eventi è:

(A) il prodotto delle probabilità di ciascun evento.

(B) la somma delle probabilità di ciascun evento diminuita della probabilità che si verifichino entrambi gli eventi.

(C) la probabilità di uno degli eventi diminuita della probabilità che si verifichino entrambi gli eventi.

(D) la somma delle probabilità di ciascun evento.

(E) il rapporto delle probabilità di ciascun evento.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
Infatti, la somma delle probabilità di ciascun evento contempla due volte la probabilità che essi si verifichino congiuntamente.

Problema 4. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{2^{\frac{1}{1-x}} - 4}\,.$$

(A) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(B) $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

(D) $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

(E) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, si deve imporre che

$$2^{\frac{1}{1-x}} - 4 \geq 0 \iff 2^{\frac{1}{1-x}} \geq 2^2 \iff \frac{1}{1-x} \geq 2 \iff \frac{2x-1}{1-x} \geq 0 \iff \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

Problema 5. Nel paese "Dico no" si parla per negazioni: per dire "oggi piove" si dice "oggi non piove". Come si direbbe se volessimo affermare che: "tutti i romanzi hanno un titolo ed un protagonista"?

(A) Nessun romanzo ha un titolo e un protagonista.

(B) Nessun romanzo ha un titolo o un protagonista.

(C) C'è un romanzo senza titolo e protagonista.

(D) C'è un romanzo senza titolo o senza protagonista.

(E) Tutti i romanzi non hanno titolo e protagonista.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Infatti, per negare la congiunzione "e" occorre una disgiunzione "o" e per negare una proprietà universale "tutti" basta l'esistenza di un esempio in cui la proprietà non valga.

Problema 6. Siano A,B, C tre insiemi e siano $f : A \to B$, $g : B \to C$ due funzioni. Quali delle seguenti affermazioni è falsa?

(A) Se f e g sono iniettive, allora la funzione composta $g \circ f$ è iniettiva.

(B) Se f e g sono suriettive, allora la funzione composta $g \circ f$ è suriettiva.

(C) Se la funzione composta $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva.

(D) Se la funzione composta $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva.

(E) Se la funzione composta $g \circ f$ è iniettiva, allora g è iniettiva.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (E).
Infatti, $g \circ f$ iniettiva non implica g iniettiva. Consideriamo ad esempio $A = [0, +\infty[$, $B = C = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$. Allora, g non è iniettiva poiché ad esempio $g(1) = g(-1)$, invece $g \circ f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = |x| = x$ per $x \in A = [0, +\infty[$ è iniettiva.

Problema 7. Se

$$f(x) = x^{64} + x^{40} - 16x^{32} + x^{16} + 2^{16}x^8 - 2^8(1 + 2^{12} + 2^{24}),$$
$$g(x) = x^{32} + x^8 - 2^4(1 + 2^{12}),$$

quante sono le radici **reali** comuni ai due polinomi $f(x)$ e $g(x)$?
[In altri termini: qual è la cardinalità dell'insieme $\{c \in \mathbb{R} | f(c) = g(c) = 0\}$?]

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

(E) 4 o più di 4.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, le radici reali comuni ai due polinomi sono tutte e sole le radici reali del loro massimo comun divisore (monico)

$$d(x) = x^8 - 2^4 = (x^4 - 2^2)(x^4 + 2^2) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^4 + 2^2),$$

che ha soltanto due radici reali ($\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$), visto che $(x^2 + 2)(x^4 + 2^2) > 0$ per ogni numero reale x.
Il polinomio $d(x)$ si può determinare trovando per la coppia $(f(x), g(x))$ l'ultimo resto non nullo con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive:

$$\begin{array}{l|l}
x^{64} + x^{40} - 16x^{32} + x^{16} + 2^{16}x^8 - 2^8(1 + 2^{12} + 2^{24}) & x^{32} + x^8 - 2^4(1 + 2^{12}) \\
\cline{2-2}
\underline{-x^{64} - x^{40} + 2^4(1 + 2^{12})x^{32}} & x^{32} + 2^{16} \\
2^{16}x^{32} + x^{16} + 2^{16}x^8 - 2^8(1 + 2^{12} + 2^{24}) & \\
\underline{-2^{16}x^{32} - 2^{16}x^8 + 2^{20}(1 + 2^{12})} & \\
x^{16} - 2^8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^{32} + x^8 - 2^4(1 + 2^{12}) & x^{16} - 2^8 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^{32} + 2^8x^{16}} & x^{16} + 2^8 \\
2^8x^{16} + x^8 - 2^4(1 + 2^{12}) & \\
\underline{-2^8x^{16} + 2^{16}} & \\
x^8 - 2^4 &
\end{array}.$$

Problema 8. Sia I_k, $k = 0, 1, \ldots$, una successione di intervalli tali che $I_{k+1} \subset I_k$ e $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|I_k|$.[2] Partendo da $I_0 = [1, 4]$, qual è il più piccolo intero k per il quale $|I_k| < 10^{-3}$?

[2] Si è indicata con $|I|$ la lunghezza dell'intervallo I.

(A) $10.$

(B) $11.$

(C) $11.55.$

(D) $12.$

(E) $12.55.$

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (D).
Infatti $|I_k| = \frac{1}{2}|I_{k-1}| = \ldots = \frac{1}{2^k}|I_0|$. Dunque $|I_k| < 10^{-3}$ se $\frac{1}{2^k}|I_0| = \frac{3}{2^k} < 10^{-3}$. Quindi $k > \log_2(3 \cdot 10^3) \approx 11.55$. Il più piccolo intero k è dunque 12.

Problema 9. Il seguente enunciato

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che se } 0 < |h| < \delta \text{ allora } \left| \frac{f(1+h) - f(1) - 4h}{h} \right| < \epsilon$$

significa che:

(A) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4.$

(B) $\lim_{x \to 4} f(x) = 1.$

(C) $f'(1) = 4.$

(D) $f'(4) = 1.$

(E) $\lim_{h \to 0} f(1+h) = f(1).$

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, l'enunciato può essere riscritto come

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che se } 0 < |h| < \delta \text{ allora } \left| \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - 4 \right| < \epsilon$$

e dalla definizione di derivata nel punto 1 e dalla nozione di limite, segue che

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 4.$$

Problema 10. In una data unità di misura, le due due sfere Γ_1 e Γ_2 hanno i centri che distano 1 e volume 36π e $32\pi/3$, rispettivamente. Allora:

(A) l'intersezione di Γ_1 con Γ_2 è una circonferenza.

(B) l'intersezione di Γ_1 con Γ_2 è vuota.

(C) con le indicazioni fornite non si può dire nulla sull'intersezione di Γ_1 con Γ_2.

(D) l'intersezione di Γ_1 con Γ_2 è un punto.

(E) l'intersezione di Γ_1 con Γ_2 è una delle due sfere.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
Infatti, ricordando la formula che collega volume e raggio della sfera, i raggi di Γ_1 e Γ_2 sono 3 e 2, rispettivamente. Se i loro centri distano 1 allora Γ_2 è tangente internamente a Γ_1.

Problema 11. I numeri naturali x e y verificano, rispettivamente, le condizioni (1) e (2).

(1) Se al primo numero perfetto[3] si aggiunge il prodotto di x per la somma del secondo numero perfetto con x stesso, il totale ottenuto è quest'anno.

(2) Si ritorna a nove anni fa, se si calcola il triplo del numero determinato nel modo seguente: si aggiunge alla somma del primo e terzo numero perfetto il prodotto del doppio di y per la differenza fra y e il secondo numero perfetto e poi, dal numero così ottenuto, si sottrae la differenza fra y e il primo numero perfetto moltiplicata per il primo numero perfetto.

Ma siamo sicuri che questi numeri esistono? Quale dei seguenti casi si verifica?

(A) Entrambi i numeri naturali x e y esistono e si ha $x \neq y$.

(B) Entrambi i numeri naturali x e y esistono e si ha $x = y$.

(C) Dei numeri naturali x e y, il primo (x) esiste, mentre il secondo (y) **non** esiste.

(D) Dei numeri naturali x e y, il primo (x) **non** esiste, mentre il secondo (y) esiste.

(E) Entrambi i numeri naturali x e y **non** esistono.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B).
Infatti le equazioni

$$6 + x(x + 28) - 2019 = 0$$
$$[\text{equivalente a } x^2 + 28x - 2013 = 0, \quad (x + 14)^2 - 47^2 = 0, \quad (x - 33)(x + 61) = 0]$$

e

$$2010 = 3[(6 + 496) + 2y(y - 28)] - (y - 6)6$$
$$[\text{equivalente a } 335 = (3 + 248) + y(y - 28) - (y - 6)3, y^2 - 31y - 66 = 0,$$
$$y^2 - 31y - 66 = 0, \left(y - \frac{31}{2}\right)^2 - (\frac{35}{2})^2 = 0, (y - 33)(y + 2) = 0]$$

hanno entrambe un unico numero naturale (33) fra le soluzioni (le altre sono interi negativi, rispettivamente, -61 e -2).

Problema 12. Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ è un numero reale tale che $1 - \sin(\alpha) = 2\cos(\alpha)$ allora $1 + \operatorname{sen}(\alpha)$ vale:

(A) $\frac{1}{2}\cos(\alpha)$.

(B) $2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$.

(C) $2\big[\operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha)\big]$.

(D) $2\cos^2(\alpha)$.

(E) $\frac{1}{2}\cos^2(\alpha)$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (A).
Infatti, per il numero reale α considerato risulta

$$[1 - \operatorname{sen}(\alpha)][1 + \operatorname{sen}(\alpha)] = 1 - \operatorname{sen}^2(\alpha) = \cos^2(\alpha)$$
$$\iff 2\cos(\alpha)[1 + \operatorname{sen}(\alpha)] = \cos^2(\alpha)$$

e quindi $1 + \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{2}$.

[3] Un numero *perfetto* è un numero naturale uguale alla somma dei suoi divisori propri. Ad esempio, i primi tre sono 6 $(= 1 + 2 + 3)$, 28 $(= 1 + 2 + 4 + 7 + 14)$, 496 $(= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248)$.

Problema 13. Sia D l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x} - \sqrt{-x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 2}\,.$$

Quale delle seguenti affermazioni

(A) esistono a, b numeri reali tali che $D = \{x \mid a < x < b\}$,

(B) esistono a, b numeri reali tali che $D = \{x \mid a \leq x < b\}$,

(C) esistono a, b numeri reali tali che $D = \{x \mid a < x \leq b\}$,

(D) esistono a, b numeri reali tali che $D = \{x \mid a \leq x \leq b\}$,

(E) esiste un numero reale a tale che $D = \{x \mid a < x\}$,

è vera?

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (D).
Svolgimento 1
D è l'intersezione degli insiemi di definizione D_1 e D_{21} delle funzioni radici; essi si ottengono imponendo che i radicandi (polinomi) $P_1(x)$ e $P_1(x)$ siano non negativi, quindi D è intersezione di (unione di intervalli) chiusi, dunque è un insieme chiuso.
Svolgimento 2
Per composizione e somma, la funzione $f(x)$ è continua, monotona a tratti, limitata sugli intervalli limitati, quindi non è possibile sia definita intorno ad a (o b) e non in a (o b). (Insomma il limite esiste ed è finito).
Svolgimento 3
Ricordando il triangolo di Tartaglia, si nota che

$$P_1(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x = (x-1)^5 + 1$$

e quindi

$$P_1(x) \geq 0 \iff (x-1)^5 \geq -1 \iff x \geq 0.$$

Analogamente, $P_2(x) = -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 2 = (1-x)^5 - 1$ e

$$P_2(x) \geq 0 \iff (x-1)^5 \leq 1 \iff x \leq 2.$$

Pertanto, $D = [0, 2]$.

Problema 14. La successione di termine generale $y_n = -n + \sqrt{n^2 + 3n}$ è:

(A) divergente positivamente.

(B) oscillante.

(C) divergente negativamente.

(D) convergente a 0.

(E) convergente a $3/2$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E).
Infatti, si ha:

$$-n + \sqrt{n^2 + 3n} = \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \implies \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{3}{2}.$$

Problema 15. La differenza

$$\sum_{n=1}^{500}(n+1)-\sum_{n=1}^{500}(n-4)$$

vale:

(A) 2500.

(B) -500.

(C) 80.

(D) 1500

(E) $\frac{2500}{3}$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (A).
Infatti, tenendo presente che

$$\sum_{n=1}^{N} n=\frac{N(N+1)}{2},$$

si ha che il minuendo vale

$$\sum_{n=1}^{500}(n+1)=\sum_{m=2}^{501} m=\frac{501\cdot 502}{2}-1=125\,750,$$

il sottraendo

$$\sum_{n=1}^{500}(n-4)=\sum_{n=1}^{500} n-4\sum_{n=1}^{500} 1=\frac{500\cdot 501}{2}-2000=123\,250,$$

e la loro differenza 2500.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan^2(x)\log\left(\frac{1}{1+x}\right)}-1}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}.$$

Soluzione. Ricordando che

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1,\quad \lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}=1,\quad \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=\log(e),\quad \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^k-1}{y}=k$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan^2(x)\log\left(\frac{1}{1+x}\right)}-1}{\sqrt[3]{1+x^3}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan^2(x)\log\left(\frac{1}{1+x}\right)}-1}{\tan^2(x)\log\left(\frac{1}{1+x}\right)}\cdot\frac{\tan^2(x)}{x^2}\cdot\frac{\log\left(1-\frac{x}{1+x}\right)}{-\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}\\
&\quad\times\left(-\frac{1}{1+x}\right)\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan^2(x)\log\left(\frac{1}{1+x}\right)}-1}{\tan^2(x)\log\left(\frac{1}{1+x}\right)}\cdot\frac{\tan^2(x)}{x^2}\cdot\frac{\log\left(1-\frac{x}{1+x}\right)}{-\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{x^2}\cdot\frac{\log\left(1-\frac{x}{1+x}\right)}{-\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1-\frac{x}{1+x}\right)}{-\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}\\
&= -\log(e)\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}-1} = -\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}\right]^{-1} = -3\log(e).
\end{aligned}$$

Problema 17. Il triangolo ΔABC ha perimetro p uguale alla sua area S ed è simile al triangolo $\Delta A'B'C'$ i cui lati misurano $(|B'C'|, |C'A'|, |A'B'|) = (13, 14, 15)$. Allora, se $a < b < c$ sono le misure dei lati di ΔABC, deve esistere una costante k tale che

$$(a, b, c) = (13k, 14k, 15k).$$

Ma quanto vale k?

Soluzione. La risposta è $k = 1/2$.
(I) Sia $C'' \in A'B'$ il piede dell'altezza di $\Delta A'B'C'$ relativa al lato maggiore $\overline{A'B'}$ e siano $h' = |\overline{C'C''}|$ la lunghezza di questa altezza e $x = |\overline{C''B'}|$. Si ha $x = |\overline{C''B'}| < |\overline{C''A'}| = 15 - x$ e, per il teorema di Pitagora, $13 - x^2 = (h')^2 = 14^2 - (15 - x)^2$. Di qui si ricava $x = 33/5$ e quindi $(h')^2 = 13^2 - x^2 = 13^2 - (33/5)^2 = (56/5)^2$, cioè $h' = 56/5$.
Dopo di ciò, detta h la lunghezza dell'altezza di ΔABC relativa al lato maggiore $\overline{AB}$, ovviamente (per la similitudine) si ha $h = h'k$ e quindi

$$42k = \mathit{perim}(\Delta ABC) = \mathit{area}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ch'k = 84k^2$$

da cui $k = 1/2$.
(II) Infatti, $p = 42k$ e applicando la formula di Erone

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)} = k^2\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = k^2\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 2^4} = 84k^2.$$

Pertanto:

$$p = A \iff 84k^2 = 42k \iff k = \frac{1}{2}.$$

Problema 18. Si vuole ricoprire un foglio di colore bianco e di forma quadrata di lato $36\sqrt{\pi}$ disassemblando un fiore di carta di colore giallo. Si sa che:

1. il fiore è composto da una parte centrale circolare C e da tre corone ognuna di di dieci petali;
2. C ha lo stesso raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$;
3. i petali di una stessa corona sono uguali tra loro;
4. ogni petalo di ciascuna corona è di forma ellittica avente eccentricità $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$;
5. le lunghezze degli assi maggiori dei petali delle tre corone sono uguali ai primi tre termini della progressione geometrica di ragione 2 con termine iniziale pari al raggio di C.

Determinare l'area A della parte del foglio che resterà bianca.

Soluzione. La risposta è 972π.
Dalla 2) segue che C ha raggio 3. Dalla 5) si ricava che gli assi maggiori dei tre petali tipo sono allora: $2a_1 = 3, 2a_2 = 6, 2a_3 = 12$. Dalla 4) discende che le lunghezze dei semiassi minori valgono:

$$i = 1, 2, 3, \quad b_i = \sqrt{a_i^2 - e^2 a_i^2} = a_i\sqrt{1 - e^2} = \frac{2}{3} a_i.$$

Quindi $a_1 = 3/2, a_2 = 3, a_3 = 6$ e $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4$. Di conseguenza, ricordando che ciascuna corona ha dieci petali, si ha:

$$A = 36^2\pi - \left(9 + 10 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 + 10 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 6 \cdot 4\right)\pi = (1296 - 324)\pi = 972\pi.$$

Problema 19. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log_{1/10}\left(x - 6 - \sqrt{x^2 - 9x + 14}\right).$$

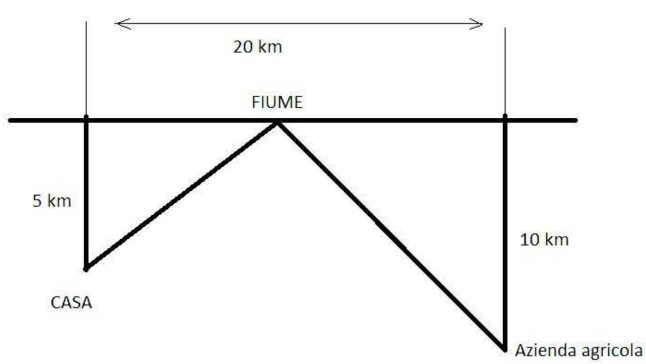
Soluzione. L'insieme di definizione della funzione f è l'intervallo $[7, \frac{22}{3}[$. Infatti, si ha:

$$x - 6 - \sqrt{x^2 - 9x + 14} > 0 \iff \sqrt{x^2 - 9x + 14} < x - 6$$

da cui

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 \geq 0 \\ x - 6 > 0 \\ x^2 - 9x + 14 < (x-6)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 2 \ \vee \ x \geq 7 \\ x > 6 \\ 3x < 22 \end{cases} \iff 7 \leq x < \frac{22}{3}.$$

Problema 20. Un agricoltore ogni mattina si reca dalla sua abitazione al fiume per prendere acqua da portare alla sua azienda agricola.



Nell'ipotesi che la distanza tra la sua casa ed il fiume sia di 5 km, che la distanza tra l'azienda agricola ed il fiume sia di 10 km e che il tratto di fiume in questione abbia lunghezza 20 Km (si veda anche la figura), determinare la minima distanza che l'agricoltore può percorrere dalla sua casa all'azienda agricola prelevando l'acqua dal fiume.

Soluzione. La risposta è 25 km.

Procedimento 1

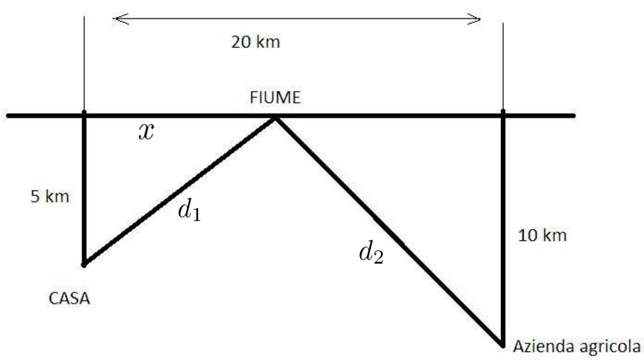
La figura

mostra che ci sono tre possibili tipi di percorso. Il grafico centrale rappresenta un ipotetico percorso in linea retta tra il punto di partenza $A(0,-5)$ (la casa dell'agricoltore) e il punto $C(20,10)$ simmetrico rispetto alla direzione del fiume del punto $B(20,-10)$ (l'azienda agricola). Il grafico più a sinistra (a destra) rappresenta invece un percorso tra A e C che è una spezzata di due segmenti i cui punti hanno ordinata maggiore (minore) dei quella dei punti del segmento AC. In entrambi i casi la spezzata ha una lunghezza maggiore della lunghezza del segmento AC che vale:

$$|AC| = \sqrt{(20-0)^2 + (10+5)^2} = \sqrt{400+225} = 25.$$

Procedimento 2

Con riferimento alla figura



$$d_1 = \sqrt{x^2+25} \qquad \text{e} \qquad d_2 = \sqrt{(20-x)^2+100}.$$

La distanza totale

$$\forall x \in (0,20), \qquad D(x) = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{(20-x)^2+100}$$

è quella che si deve rendere minima. Ora, risulta

$$D'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+25}} + \frac{-2x}{2\sqrt{(20-x)^2+100}}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\forall x \in (0,20), \quad D'(x) \geq 0 &\iff x\sqrt{(20-x)^2+100} \geq (20-x)\sqrt{x^2+25} \\
&\iff x^2\left[(20-x)^2+100\right] \geq (20-x)^2(x^2+25) \\
&\iff 3x^2+40x-400 \geq 0 \\
&\iff \frac{20}{3} \leq x < 20.
\end{aligned}$$

Tenendo conto che $\lim_{x\to 0^+} D(x) = 5+10\sqrt{5} \approx 27{,}31$ e $\lim_{x\to 20^-} D(x) = 10+5\sqrt{17} \approx 30{,}62$, la funzione $D(x)$ ha il suo minimo assoluto in $x = 20/3$:

$$D\left(\frac{20}{3}\right) = \sqrt{\frac{400}{9}^2 + 25} + \sqrt{\frac{1600}{9}^2 + 100} = \frac{1}{3}\sqrt{625} + \frac{1}{3}\sqrt{2500} = \frac{75}{3} = 25.$$

Problema 21. Su una scacchiera (un quadrato a sua volta suddiviso in 64 quadratini) vuota si vogliono posizionare solo le quattro torri (due bianche e due nere).[4] Permanendo le regole di movimento e di cattura delle torri, in quanti modi diversi ciò può essere ottenuto in maniera tale che nessuna delle torri possa minacciare una delle altre tre?[5]

Soluzione. La prima torre può essere disposta in ciascuno dei 64 quadratini. Dalla sua posizione essa minaccia 7 quadratini in orizzontale e 7 quadratini in verticale per cui la seconda torre può essere sistemata nei rimanenti $64-14-1 = 49$ quadratini. La seconda torre minaccia a sua volta 7 quadratini in orizzontale e 7 quadratini in verticale dei quali, però, 2 erano già stati minacciati dalla prima torre. Pertanto la terza torre può occupare i restanti $49 - 12 - 1 = 36$ quadratini. La terza torre minaccia a sua volta 7 quadratini in orizzontale e 7 quadratini in verticale dei quali, però, 4 erano già stati minacciati dalla prima e dalla seconda torre. Pertanto la quarta torre può occupare i restanti $36 - 10 - 1 = 25$ quadratini. Tenendo conto del fatto che le due torri bianche sono indistinguibili tra loro così come le due torri nere, la soluzione al quesito è: $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25/2/2 = 705600$.

[4] La torre, uno dei pezzi del gioco degli scacchi, si può muovere (e *catturare* un qualsiasi altro pezzo di colore diverso dal suo) sia in orizzontale che in verticale attraversando ogni quadratino libero che incontra nel suo cammino.

[5] Quindi si intende che le due torri bianche, così come le due torri nere, si minacciano reciprocamente tra loro.

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 22.

- Γ è la circonferenza di centro O circoscritta al triangolo acutangolo ΔABC (O è il **circocentro** di ΔABC): si assume che i vertici A, B, C del triangolo siano ordinati in senso antiorario e, dette α, β, γ le misure in radianti degli angoli interni – rispettivamente – $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ del triangolo,[6] si suppone che $\alpha \leq \beta \leq \gamma < \pi/2$;
- I è l'incentro del triangolo ΔABC (cioè, il centro della circonferenza inscritta in ΔABC);
- A', B', C' sono i punti medi degli archi di Γ (rispettivamente $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$), che hanno come estremi due vertici del triangolo ΔABC, ma non contengono il terzo vertice (rispettivamente A, B, C) del triangolo;
- $$A'' = \overline{A'A} \cap \overline{B'C'}, \qquad B'' = \overline{B'B} \cap \overline{C'A'}, \qquad C'' = \overline{C'C} \cap \overline{A'B'}$$
  sono i punti di intersezione dei lati del triangolo $\Delta A'B'C'$ con i segmenti (rispettivamente) $\overline{A'A}, \overline{B'B}, \overline{C'C}$.

Provare che:

(1) L'incentro I di ΔABC è il punto di intersezione delle rette AA', BB', CC'.

(2) $A\widehat{A''}B'$ è un angolo retto (analogamente, gli angoli $B\widehat{B''}C'$ e $C\widehat{C''}A'$ sono retti).

(3) L'incentro I di ΔABC è l'ortocentro di $\Delta A'B'C'$.

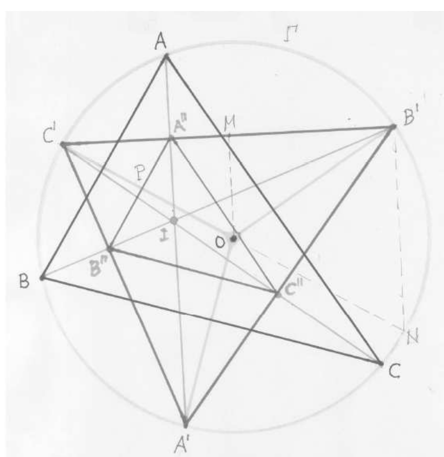
(4) $A''B'' \parallel AB, \quad B''C'' \parallel BC, \quad C''A'' \parallel CA.$

(5) I è anche l'incentro di $\Delta A''B''C''$.

(6) Gli angoli $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{C'}$ del triangolo $\Delta A'B'C'$ sono complementari della metà degli angoli, rispettivamente, $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ del triangolo ΔABC.

(7) I triangoli $\Delta A'C''B''$, $\Delta B'A''C''$, $\Delta C'B''A''$, $\Delta A'B'C'$ sono fra loro a due a due simili.[7]

Soluzione. Si faccia anche riferimento alla seguente figura.



---

[6] Ovviamente, $\hat{A} \equiv B\widehat{A}C$, $\hat{B} \equiv C\widehat{B}A$ e $\hat{C} \equiv A\widehat{C}B$.

[7] Si ricorda che: (*) Per un quadrilatero convesso $ABCD$ (vertici ordinati in senso antiorario) le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $ABCD$ è ciclico (cioè, è inscrivibile in una circonferenza).

(ii) La somma di due angoli opposti di $ABCD$ è un angolo piatto
$$(m(A\widehat{B}C) + m(C\widehat{D}A) = \pi \text{ o } m(D\widehat{A}B) + m(B\widehat{C}D) = \pi).$$

(iii) In due triangoli che abbiano in comune uno dei lati di $ABCD$ e come altro lato una delle due diagonali del quadrilatero, gli angoli opposti al lato comune sono congruenti
$$(B\widehat{C}A \equiv B\widehat{D}A \text{ o } C\widehat{A}B \equiv C\widehat{D}B \text{ o } D\widehat{A}C \equiv D\widehat{B}C \text{ o } A\widehat{B}D \equiv A\widehat{C}D).$$

.

Poiché l'arco $\overset{\frown}{BA'}$ di Γ (non contenente A) è la metà dell'arco $\overset{\frown}{BC}$ di Γ (non contenente A), l'angolo alla circonferenza $A'\widehat{A}B$ è la metà dell'angolo alla circonferenza $C\widehat{A}B$, quindi la semiretta AA' di origine A è la bisettrice dell'angolo $C\widehat{A}B$. Analogamente le semirette BB' e CC' (rispettivamente, di origini B e C) sono le bisettrici degli angoli (rispettivamente) $A\widehat{B}C$ e $B\widehat{C}A$. La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo. Dunque, dovendo essere equidistante dai tre lati di ΔABC, I deve appartenere alle bisettrici AA', BB', CC' dei tre angoli di ΔABC. Ciò prova (1).

Consideriamo il triangolo $\Delta AA''B'$.
$A''\widehat{B'}A = C'\widehat{B'}A$ è congruente a $C'\widehat{C}A$; e $B'\widehat{A}C$ è congruente a $B'\widehat{B}C$ (angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco); inoltre $B'\widehat{A}A'' = B'\widehat{A}C \,\dot\cup\, C\widehat{A}A'$ (unione disgiunta). Dunque

$$\begin{aligned} m(A''\widehat{B'}A) + m(B'\widehat{A}A'') &= m(C'\widehat{C}A) + m(B'\widehat{B}C) + m(C\widehat{A}A') = \\ &= \frac{1}{2}[m(B\widehat{C}A) + m(A\widehat{B}C) + m(C\widehat{A}B)] = \frac{1}{2}[\gamma + \beta + \alpha] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e quindi

$$m(A\widehat{A''}B') = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

In modo analogo si procede per gli angoli $B\widehat{B''}C'$ e $C\widehat{C''}A'$. Ciò prova (2).

Per (2), A'', B'', C'' sono i piedi delle tre altezze del triangolo $\Delta A'B'C'$, quindi

$$I = AA' \cap BB' \cap CC' = A'A'' \cap B'B'' \cap C'C''$$

è l'ortocentro di $\Delta A'B'C'$. Ciò prova (3).

Proviamo che A'' è il punto medio di $\overline{AI}$. Consideriamo i triangoli $\Delta AA''B'$ e $\Delta B'A''I$, entrambi rettangoli in A''. Si ha

$$A''\widehat{B'}A = C'\widehat{B'}A \equiv C'\widehat{C}A \equiv B\widehat{C}C' \equiv B\widehat{B'}C' = I\widehat{B'}A''$$

(prima e terza congruenza valide, perché si tratta di angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco; seconda congruenza valida perché $C'C$ è bisettrice dell'angolo di vertice C). Ne segue che $\Delta AA''B' \equiv \Delta B'A''I$ e quindi $\overline{AA''} \equiv \overline{A''I}$.
In modo analogo si verifica che B'' è il punto medio di $\overline{BI}$. Dunque, $A''B''$ interseca nei loro punti medi due lati ($\overline{AI}$ e $\overline{BI}$) del triangolo ΔABI e, di conseguenza, è parallelo al terzo lato $\overline{AB}$. Analogamente si ha che $B''C'' \parallel BC$ e $C''A'' \parallel CA$. Ciò prova (4).

Consideriamo le rette parallele (per (4)) $A''C''$ e AC (rispettivamente $A''B''$ e AB) tagliate dalla trasversale AA'. Essendo angoli corrispondenti, $A'\widehat{A}C \equiv A'\widehat{A''}C''$ (rispettivamente $A'\widehat{A}B \equiv A'\widehat{A''}B''$). E si sa (cfr. (1)) che $A'A$ è bisettrice di $C\widehat{A}B$. Dunque $A'A''$ è bisettrice di $C''\widehat{A''}B'' \equiv C\widehat{A}B$. In modo analogo si verifica che $B'B''$ e $C'C''$ bisecano gli angoli di vertici B'' e C''. Ciò prova (5).

Nel triangolo rettangolo $\Delta A'B'B''$, con $\widehat{B''}$ retto, $\widehat{A'}$ è il complemento di $A'\widehat{B'}B''$. Ma $A'\widehat{B'}B'' = A'\widehat{B'}B \equiv A'\widehat{A}B$ (angoli alla circonferenza Γ che sottendono lo stesso arco $\overset{\frown}{BA'}$) e $A'\widehat{A}B$ è la metà di $\widehat{A}$. Dunque $m(\widehat{A'}) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$. Analogamente per gli altri due angoli di $\Delta A'B'B''$. Ciò prova (6).

Consideriamo il quadrilatero $B'C'B''C''$. Nei due triangoli $\Delta B'C'C''$, $\Delta B'C'B''$ (che hanno in comune il lato $\overline{B'C'}$ del quadrilatero e per altro lato una delle diagonali di questo) gli angoli $C'\widehat{C''}B'$, $C'\widehat{B''}C'$ (opposti al lato comune $\overline{B'C'}$) sono entrambi retti (cfr. (3)), quindi congruenti. Pertanto il quadrilatero $B'C'B''C''$ è ciclico e quindi due suoi angoli opposti sono supplementari:

$C'\widehat{B''}C''$ e $C''\widehat{B'}C' = \widehat{B}'$ sono supplementari (analogamente: $B''\widehat{C''}B'$ e $B'\widehat{C'}B'' = \widehat{C}'$ sono supplementari). D'altra parte $C''\widehat{B''}A'$ è supplementare di $C'\widehat{B''}C''$ (risp. $A'\widehat{C''}B''$ è un supplementare di $B''\widehat{C''}B'$). Pertanto $C''\widehat{B''}A' \equiv \widehat{B}'$ (risp. $A'\widehat{C''}B'' \equiv \widehat{C}'$). Dunque, avendo (due e quindi tutti e tre) gli angoli congruenti, i triangoli $\Delta A''C''B''$, $\Delta A'B'C'$ sono simili. In modo analogo si riconosce che $\Delta B'A''C'' \sim \Delta A'B'C'$ e $\Delta C'B''A'' \sim \Delta A'B'C'$.
Poiché la similitudine è una equivalenza, i quattro triangoli elencati in (10) sono a due a due simili fra loro. Ciò prova (7).

Problema 23. Matteo e Lorenzo vogliono costruire una scatola di carta (senza coperchio) partendo da un foglio di cartoncino rettangolare di dimensioni 30 cm $\times$40 cm, tagliando dagli angoli quattro quadratini uguali e operando successivamente delle piegature.

a) Determinare il volume della scatola.

b) Indicare l'altezza massima che può avere la scatola.

c) Dimostrare che esiste un taglio tale che la scatola abbia volume di 400 cm^3.

d) Qual è la massima capacità della scatola?

Soluzione. a) Scegliendo come variabile x la lunghezza in cm del lato dei quadrati, il volume è fornito dalla funzione

$$V(x) = x(40-2x)(30-2x) = 1200x - 140x^2 + 4x^3 = 4x(x^2 - 35x + 300).$$

b) L'altezza massima che può avere la scatola è di 15 cm. Infatti l'altezza della scatola coincide con il lato x dei quadratini; d'altra parte $30 - 2x \geq 0 \iff x \leq 15$.

c) Dimostrare che esiste un taglio tale che $V(x) = 400$ equivale a dimostrare che

$$\exists\, x \in [0,15] : g(x) := 4x(x^2 - 35x + 300) - 400 = 0.$$

Valutando g agli estremi dell'intervallo $[0,15]$, risulta $g(0) = -400 < 0$ e $g(15) = 7475 > 0$; inoltre, g è continua in $[0,15]$ e derivabile in $(0,15)$. Per il teorema di esistenza degli zeri, $\exists\, x_0 \in (0,15) : g(x_0) = 0$.

d) Al fine di determinare la massima capacità della scatola, occorre trovare il massimo assoluto di $V(x)$, $x \in [0,15]$. Si noti che V è continua in $[0,15]$ e derivabile in $(0,15)$. Inoltre, $V(0) = V(15) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \in (0,15)$. Pertanto $x = 0$, $x = 15$ sono i punti di minimo assoluto della funzione; invece, i punti di massimo appartengono all'intervallo $(0,15)$ e sono ottenuti ponendo la derivata di V uguale a zero. Ebbene, risulta:

$$V'(x) = 0 \iff 3x^2 - 70x + 300 = 0 \quad \iff \quad x = \frac{35 \pm 5\sqrt{13}}{3}.$$

Si osservi che risulta $x = \frac{35+5\sqrt{13}}{3} > 15$. Pertanto, il punto di massimo assoluto nell'intervallo $(0,15)$ è $x = \frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ e il massimo volume della scatola è $V\left(\frac{35-\sqrt{37}}{2}\right) \approx$ 1 516,15.

Problema 24. Si consideri l'insieme $S = \{\text{N, I, O}\}$ e il meccanismo di produzione di parole costituite con le sole lettere di S che, a partire dalla parola NI, è basato sulle seguenti cinque regole.

r$_1$) A una parola che termina con I si può concatenare la lettera O; ad esempio, se x rappresenta una parte di una parola, allora è permesso: NxI $\to$ NxIO.[8]

[8] Per *parte di una parola* si deve intendere un gruppo consecutivo di lettere della parola o eventualmente nessuna lettera. Per *concatenamento* si deve intendere l'aggiunta di un gruppo di lettere alla fine della parola.

r_2) La parte di parola dopo la lettera N può essere concatenata due volte alla parola stessa; ad esempio, se x rappresenta una parte di una parola, allora è permesso: $\mathrm{N}x \to \mathrm{N}xxx$.

r_3) Se in una parola ci sono due lettere I consecutive allora esse possono essere rimpiazzate da una lettera O; ad esempio, se x e y rappresentano due parti di una parola, allora è permesso: $\mathrm{N}x\mathrm{II}y \to \mathrm{N}x\mathrm{O}y$.

r_4) Se in una parola ci sono due lettere O consecutive allora esse possono essere eliminate; ad esempio, se x e y rappresentano due parti di una parola, allora è permesso: $\mathrm{N}x\mathrm{OO}y \to \mathrm{N}xy$.

r_5) Se l_1 e l_2 sono due lettere consecutive di una parola entrambe diverse da N allora esse possono essere permutate tra loro; ad esempio, se x e y rappresentano due parti di una parola, allora è permesso: $\mathrm{N}xl_1l_2y \to \mathrm{N}xl_2l_1y$.

Segue un esempio di produzione di parole:

$$\mathrm{NI} \xrightarrow{\mathrm{r}_1} \mathrm{NIO} \xrightarrow{\mathrm{r}_2} \mathrm{NIOIOIO} \xrightarrow{\mathrm{r}_5} \mathrm{NIOOIIO}.$$

Dopo di ciò:

a) si produca, specificando la regola applicata in ciascun passo, una parola utilizzando almeno una volta ciascuna delle cinque regole;

b) si dimostri che il numero delle lettere I presenti in una generica parola non può essere pari;

c) si dimostri che non si può produrre la parola NO.

Soluzione. a) A solo titolo esemplificativo, basta continuare la sequenza di parole ad illustrazione delle regole applicando la r_4 e poi la r_3.

b) Sia n_I il numero delle lettere I presenti in una qualsiasi parola. Le regole r_1, r_4 e r_5 non alterano n_I. L'applicazione della regola r_2 fa triplicare n_I. L'applicazione della regola r_3 fa diminuire n_I di due. In definitiva, con m e n interi positivi, $n_\mathrm{I} = 3^m - 2n$.[9] Ora, si supponga che n_I sia pari ovvero che esista un un numero naturale k per il quale si ha:

$$3^m - 2n = 2k \iff 3^m = 2(n+k).$$

Allora un tale k non può esistere.

c) Per la b) si può affermare che ogni parola producibile con le regole da r_1 a r_5 a partire dalla parola NI deve avere almeno una lettera I. Quindi, la parola NO non è producibile.

[9] Ovviamente, $m = 0$ e $n = 0$ rappresentano la parola iniziale NI per la quale $n_\mathrm{I} = 1$.