Certamen Nazionale di Matematica "R. Caccioppoli"

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"

Sezione napoletana della Mathesis "A. Morelli"

Liceo Scientifico Statale "G. Mercalli"

NAPOLI, 07 Aprile 2011

LSS "G. Mercalli"

(Tempo a disposizione: 4 ore)

NOTE: Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo.
Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici programmabili, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, **è vietato l'uso di telefoni cellulari**.
La prova consiste di 33 problemi divisi in 3 gruppi.
Nella **Sezione A: problemi a risposta multipla**, per i problemi dal numero 1 al numero 25 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, nella pagina con la griglia. Ogni risposta giusta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
Nella **Sezione B: problemi a singola risposta**, i problemi da 26 a 30 richiedono una sola risposta che va indicata nella pagina con la griglia nella relativa finestrella. Ogni risposta giusta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
Infine, nella **Sezione C: problemi con dimostrazione**, i problemi 31, 32 e 33 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di tali problemi verrà valutato con un punteggio da 0 a 10. Con questo fascicoletto, nella busta grande, vi è anche una busta piccola con un foglietto che compilerai con i tuoi dati personali e poi inserirai nella busta piccola. Al momento della consegna e in presenza di un docente chiuderai la busta piccola che insieme al fascicoletto verrà inserita nella busta grande.
AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai 4 ore di tempo.
Buon lavoro!

SEZIONE A: PROBLEMI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Quanto vale il prodotto $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\ldots(\log_{31} 32)$?

(A) 5.

(B) 1/2.

(C) 2.

(D) 3/2.

(E) 5/2.

Soluzione 1. La risposta esatta è (A).
$(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\ldots(\log_{31} 32) = \left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)\left(\frac{\ln 5}{\ln 4}\right)\ldots\left(\frac{\ln 32}{\ln 31}\right) = \frac{\ln 32}{\ln 2} = 5$

2. Una ditta di catering adotta la seguente modalità di pagamento per ogni servizio di ristorazione fornito. Al momento della prenotazione il cliente è tenuto a corrispondere 1/10 del costo totale del servizio, i 2/3 del restante importo devono essere corrisposti prima della fornitura e il saldo alla fine del servizio. Quale frazione del costo totale si paga alla fine del servizio?

(A) 7/10.

(B) 9/10.

(C) 5/10.

(D) 3/10.

(E) 2/10.

Soluzione 2. La risposta esatta è (D).
$x - \left[\frac{1}{10}x + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{10}x\right)\right] = \frac{3}{10}x.$

3. Il costo di un week-end in una città d'arte è p per il pernottamento in albergo e $2p$ per il biglietto aereo. L'agenzia di viaggi propone uno sconto del 30% sul pernottamento e del 15% sul biglietto se la prenotazione del viaggio è effettuata on-line e il pagamento è fatto con carta di credito. Se si decide di acquistare il pacchetto in modalità on-line, quanto si risparmia in percentuale complessivamente?

(A) 15%.

(B) 20%.

(C) 25%.

(D) 30%.

(E) 35%.

Soluzione 3. La risposta esatta è (B).
$100\%(3p) - [70\%p + 85\%(2p)] = 20\%(3p).$

4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \le a \\ x^2, & \text{se } x > a \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Per quali valori del parametro a la funzione è continua in $\mathbb{R}$?

(A) $a = \pm 1$.

(B) $a = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

(C) $a = \pm 1/2$.

(D) $a = \pm\sqrt{5}/2$.

(E) $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Soluzione 4. La risposta esatta è (E).
Essendo continua in $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$, affinché $f(x)$ sia continua in $\mathbb{R}$, dovrà richiedersi che

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

e quindi

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} (x+1) \Longleftrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

5. Sapendo che $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, quanto vale $\lim_{x \to a} f(x) g(x)$?

(A) 1/2.

(B) 1/4.

(C) 3/4.

(D) 3.

(E) 1.

Soluzione 5. La risposta esatta è (C).

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{2} [f(x) + g(x)] + \frac{1}{2} [f(x) - g(x)] \right) = \frac{1}{2} 2 + \frac{1}{2} 1 = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} ([f(x) + g(x)] - f(x)) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) g(x) = \frac{3}{4}.$$

6. Il rapporto tra i volumi di due cubi è 6. Qual è il rapporto tra le loro superfici?

(A) 3.

(B) 6.

(C) $6^{2/3}$.

(D) $6^{1/3}$.

(E) $3^{3/2}$.

Soluzione 6. La risposta esatta è (C).
Detti l e L i lati dei due cubi, si ha: $\dfrac{L^3}{l^3} = 6 \Longrightarrow \dfrac{L}{l} = 6^{1/3} \Longrightarrow \dfrac{L^2}{l^2} = 6^{2/3}$.

7. Quale delle seguenti proposizioni equivale a dire che: "condizione sufficiente affinché la proposizione $\mathcal{B}$ sia vera è che sia vera la proposizione $\mathcal{A}$"?

(A) Se $\mathcal{A}$ è vera, allora $\mathcal{B}$ è vera.

(B) Se $\mathcal{B}$ è vera, allora $\mathcal{A}$ è vera.

(C) Se $\mathcal{A}$ è falsa, allora $\mathcal{B}$ è falsa.

(D) $\mathcal{A}$ è falsa se, e solo se, $\mathcal{B}$ è falsa.

(E) $\mathcal{A}$ è vera se, e solo se, $\mathcal{B}$ è vera.

Soluzione 7. La risposta esatta è (A).
Infatti, la proposizione data equivale a dire che $\mathcal{A}$ e l'implicazione $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ sono vere.

8. Qual è l'espressione della funzione inversa di $x \mapsto \dfrac{5x-3}{2x}$?

(A) $y \mapsto \dfrac{-5y+3}{-2y}$.

(B) $y \mapsto \dfrac{2y}{5y-3}$.

(C) $y \mapsto \dfrac{3}{5-2y}$.

(D) $y \mapsto \dfrac{3-5y}{2y}$.

(E) $y \mapsto \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{3}y$.

Soluzione 8. La risposta esatta è (C).
$y = \dfrac{5x-3}{2x} \Longleftrightarrow 2xy = 5x - 3 \Longleftrightarrow (2y-5)x = -3 \Longleftrightarrow x = \dfrac{3}{5-2y}$.

9. Per quanti numeri reali x nell'intervallo chiuso $[1,2]$, x e x^2 hanno la stessa parte decimale ?

(A) Due.

(B) Quattro.

(C) Uno.

(D) Tre.

(E) Nessuno.

Soluzione 9. La risposta esatta è (D).
Se il numero x, appartenente all'intervallo chiuso $[1,2]$, ha la stessa parte decimale di x^2, deve essere $x^2 - x = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Poiché $x \in [1,2] \Longrightarrow x^2 \in [1,4]$, ne segue $n \in \{0,1,2\}$ e dunque ci sono solo tre possibilità: $x = 1$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x = 2$.

10. Siano x e y due numeri reali tali che $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$. Quale delle seguenti disuguaglianze è falsa?

(A) $y - \sin y < x - \sin x$.

(B) $\sin x < \sin y$.

(C) $x - \sin x < y - \sin y$.

(D) $\cos y < \cos x$.

(E) $1 - \cos^2 x < 1 - \cos^2 y$.

Soluzione 10. La risposta esatta è (A).
La (B) e la (E) sono vere perché la funzione seno è crescente in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La (C) è vera perché la funzione $f(t) = t - \sin t$ è crescente in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La (D) è vera poiché la funzione coseno è decrescente in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La (A) è l'unica falsa.

11. Aumentando la base del rettangolo del 20% e l'altezza del 50%, di quanto aumenta l'area?

(A) 70%.

(B) 72%.

(C) 75%.

(D) 78%.

(E) 80%.

Soluzione 11. La risposta esatta è (E).
Indichiamo con a e b le misure della base e dell'altezza del rettangolo rispettivamente. Essendo $\left(a + \frac{20}{100}a\right)\left(b + \frac{50}{100}b\right) = a\left(\frac{120}{100}\right) b \left(\frac{150}{100}\right) = ab\frac{180}{100}$, si ha $ab\left(\frac{180}{100}\right) - ab = \frac{80}{100}ab$.

12. Uno studente universitario, dopo aver superato 5 esami, ha la media del 27. Se lo studente supera l'esame successivo con 21, qual è la sua media dopo il sesto esame?

(A) 24.

(B) 24.5.

(C) 25.

(D) 25.5.

(E) 26.

Soluzione 12. La risposta esatta è (E).
Detto E_i l'esame i–simo, si ha

$$\frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5}{5} = 27, \quad \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + 21}{6} = \frac{27 \cdot 5 + 21}{6} = 26.$$

13. Quanti sono i numeri di 3 cifre tali che ogni cifra sia maggiore della successiva partendo da quella delle centinaia?

(A) 336.

(B) 120.

(C) 100.

(D) 219.

(E) 169.

Soluzione 13. La risposta esatta è (B).
Non ci sono numeri che soddisfano la richiesta con la prima cifra uguale ad 1.
Sia k una cifra decimale maggiore di 1. Se il numero inizia con k, la seconda cifra può essere:
$k - 1$ e la terza una qualsiasi cifra tra 0 e $k - 2$; ci sono allora $k - 1$ possibilità;
$k - 2$ e la terza una qualsiasi cifra tra 0 e $k - 3$; ci sono allora $k - 2$ possibilità;
....
1 e la terza cifra 0; c'é una sola possibilità.
In definitiva, per un numero che inizia con $k > 1$ ci sono allora

$$1 + 2 + ... + (k - 1) = \frac{k(k - 1)}{2}.$$

I numeri di 3 cifre che soddisfano la richiesta sono in totale

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 = 120.$$

14. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

(A) $\sqrt{x^2} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(B) $\sqrt{x^2} = -x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(C) $\sqrt{x^2} = \mid x \mid \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(D) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(E) $\sqrt{(-x)^2} = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Soluzione 14. La risposta esatta è (C).

15. Assegnata la proposizione *"C'è almeno un attrezzo della palestra che tutti gli allievi sono in grado di usare"*, quale delle seguenti è la sua negazione logica?

(A) C'è qualche attrezzo della palestra che nessun allievo è in grado di usare.

(B) Ogni attrezzo della palestra non è utilizzabile da qualche allievo.

(C) Nessun allievo è in grado di usare tutti gli attrezzi della palestra.

(D) Ogni allievo non è in grado di usare almeno un attrezzo della palestra.

(E) C'è qualche allievo che è in grado di usare tutti gli attrezzi della palestra.

Soluzione 15. La risposta esatta è (B).

16. Le disequazioni

$$\ln \frac{2x+1}{x+2} > 0 \qquad \text{e} \qquad \ln(2x+1) - \ln(x+2) > 0$$

(A) Hanno lo stesso insieme di soluzioni.

(B) Hanno insiemi di soluzioni disgiunti.

(C) L'insieme delle soluzioni della seconda è contenuto nell'insieme delle soluzioni della prima.

(D) L'insieme delle soluzioni della prima è contenuto nell'insieme delle soluzioni della seconda.

(E) Gli insiemi delle soluzioni non sono disgiunti e non sono contenuti uno nell'altro.

Soluzione 16. La risposta esatta è (C).
Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln \frac{2x+1}{x+2}$ è $]-\infty, -2[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$ e l'insieme delle soluzioni della disequazione è $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.
Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x+2)$ è $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ e l'insieme delle soluzioni della disequazione è $]1, +\infty[$.

17. Sia q un quadrato di diagonale d e sia Q un quadrato di diagonale $2d$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Il perimetro di Q è il quadruplo del perimetro di q.

(B) L'area di Q è il quadruplo dell'area di q.

(C) Il lato di Q è il quadruplo del lato di q.

(D) Il volume del cubo di base Q è il quadruplo del volume del cubo di base q.

(E) Nessuna delle precedenti è vera.

Soluzione 17. La risposta esatta è (B).
Detti l e L rispettivamente i lati di q e Q, si ha: $l = d\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $L = 2d\dfrac{\sqrt{2}}{2} = d\sqrt{2}$. Pertanto: $l^2 = \dfrac{d^2}{2}$, $L^2 = 2d^2$ e $\dfrac{L^2}{l^2} = 4$.

18. Sia M l'insieme dei numeri reali y per i quali esistono un numero reale $x > 0$ ed un intero positivo n tali che $y = x + \dfrac{1}{x^n}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) $\inf M = 0$, $\sup M = +\infty$.

(B) $\inf M = 2$, $\sup M = +\infty$.

(C) $\inf M = 1$, $\sup M = +\infty$.

(D) M non è limitato né inferiormente, né superiormente.

(E) $\inf M = 0$, $\sup M = 1$.

Soluzione 18. La risposta esatta è (C).
(A) non è possibile perché $x + \frac{1}{x^n} \geq 1$ per ogni $x > 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. (B) non è possibile perché $\frac{3}{2} + \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} < 2$. (D) è ovviamente falsa. (E) non è possibile poiché $1 + \frac{1}{1} > 1$.

19. Dati due numeri reali a, b tali che $a < b$ e $ab > 0$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) $a^2 < b^2$.

(B) $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

(C) $a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0$.

(D) $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

(E) $a > 0 \quad \text{o} \quad b > 0$.

Soluzione 19. La risposta esatta è (D).

20. Per quale delle seguenti funzioni si ha $f(3x) = 3f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

(A) $f(x) = x^2$.

(B) $f(x) = 2^x$.

(C) $f(x) = \mid x \mid$.

(D) $f(x) = x - 2$.

(E) $f(x) = \sqrt{\mid x \mid}$.

Soluzione 20. La risposta esatta è (C).

21. Quanto vale $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$?

(A) 1.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 0.

(E) $\frac{1}{2}$.

Soluzione 21. La risposta esatta è (D).

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

22. In un insieme S con $2n+1$ elementi è assegnata una relazione binaria R con le due seguenti proprietà:

(1) R è simmetrica (cioè, per ogni coppia x, y di elementi di S, se x è nella relazione R con y, allora y è nella relazione R con x);

(2) per ogni sottoinsieme A di S con n elementi, esiste almeno un elemento x di S, non appartenente ad A, che è nella relazione R con ogni elemento di A.

Quale delle seguenti affermazione è vera?

(A) Qualche elemento di S è nella relazione R con tutti gli altri elementi di S.

(B) Ogni elemento di S è nella relazione R con tutti gli altri elementi di S.

(C) Nessun elemento di S è in relazione con tutti gli altri elementi di S.

(D) Ogni elemento di S non è in relazione con tutti gli altri elementi di S.

(E) I dati sono insufficienti per rispondere correttamente.

Soluzione 22. La risposta esatta è (A).
Chiamiamo "buono" un sottoinsieme B di S in cui ogni elemento è nella relazione R con tutti i rimanenti, in simboli

$$\forall x, y \in B \quad x \neq y \Longrightarrow xRy.$$

Se un sottoinsieme buono B di S ha meno di $n+1$ elementi, per l'ipotesi (2) esiste qualche $x \in S-B$ che è nella relazione R con ogni elemento di B e quindi, per l'ipotesi (1), anche ogni elemento di B è nella relazione R con x. Ne segue che anche $B \cup \{x\}$ è un sottoinsieme "buono". Pertanto, si può assumere che esista almeno un sottoinsieme "buono" B con cardinalità $|B| = n+1$. Considerato il sottoinsieme $A = S - B$, è $|A| = n$ e quindi, per (2), esiste $b_0 \in B = S - A$ nella relazione R con ogni elemento di A. In conclusione, b_0 è nella relazione R con ogni altro elemento di S.

23. Quanti interi positivi $n \leq 10000$ non sono divisibili né per 2, né per 3, né per 5?

(A) 666.

(B) 1666.

(C) 1667.

(D) 2666.

(E) 3666.

Soluzione 23. La risposta esatta è (D).
Indichiamo con $\lfloor x \rfloor$ il massimo intero minore o uguale a x. Il numero di tali interi è

$$\begin{aligned}
&10000 - \left\lfloor \frac{10000}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10000}{30} \right\rfloor = \\
&= 10000 - 5000 - 3333 - 2000 + 1666 + 1000 + 666 - 333 = \\
&= 2666.
\end{aligned}$$

24. 101 è un numero primo che, in base 10, ha come cifre –alternativamente– solo 0 e 1. Fra tutti i numeri di questo tipo, $1010\ldots1$, con $k > 1$ cifre uguali ad 1 e $k-1$ cifre uguali a 0, (1 e 0 alternati), quanti sono quelli primi?

(A) Uno.

(B) Due.

(C) Tre.

(D) Più di tre, ma in numero finito.

(E) Infiniti.

Soluzione 24. La risposta esatta è (A).
101 è l'unico primo del tipo indicato. Infatti,

$$\underbrace{1010\ldots1}_{k \text{ cifre 1 e } k-1 \text{ cifre 0}} \times 11 = \underbrace{1111\ldots1}_{2k \text{ cifre 1}} = \underbrace{1111\ldots1}_{k \text{ cifre 1}} \times \underbrace{100\ldots1}_{k-1 \text{ cifre 0}}$$

25. Siano

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 729x^8 + 891x^7 + 162x^6 + 135x^5 - 15x^4 - 69x^3 + 10x^2 - 5x + 2,\\
&g(x) = 729x^8 + 162x^7 + 135x^5 - 69x^4 + 10x^2 - 9x + 2,\\
&h(x) = [f(x)]^2,\\
&k(x) = [f(x)]^2 + 2g(x).
\end{aligned}
$$

Quante sono le radici ***razionali*** comuni dei polinomi $h(x)$ e $k(x)$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

(E) Più di tre.

Soluzione 25. La risposta esatta è (C).
Occorre contare le radici razionali di un massimo comune divisore (m.c.d) tra $h(x)$ e $k(x)$. Ma m.c.d$(h(x), k(x))$ =m.c.d$(f(x), g(x))$ e questo si calcola con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive. Si ha

$$
\begin{aligned}
f &= gq_1 + r_1, &&\text{con } q_1 = 1, && r_1 = 729x^7 + 162x^6 + 54x^4 - 69x^3 + 4x,\\
g &= r_1q_2 + r_2, &&\text{con } q_2 = x, && r_2 = 81x^5 + 6x^2 - 9x + 2,\\
r_1 &= r_2q_3, &&\text{con } q_3 = 9x^2 + 2x.
\end{aligned}
$$

Dunque $r_2 = m.c.d\,(f(x), g(x))$. Si ha $r_2 = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 (81x^2 + 27)$ e quindi la risposta esatta è (C).

SEZIONE B: PROBLEMI A SINGOLA RISPOSTA

26. Determinare l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:

$$|x-3|+|x+2|<11.$$

Soluzione 26. Risposta: $]-5,6[$.
Osservando che

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & \text{se } x\geq 3 \\ -x+3, & \text{se } x<3 \end{cases}$$
$$|x+2|=\begin{cases} x+2, & \text{se } x\geq -2 \\ -x-2, & \text{se } x<-2 \end{cases}$$

basta considerare i seguenti tre casi

$$x<-2, \quad -2\leq x<3, \quad x\geq 3.$$

(a) Se $x<-2$ si ha

$$|x-3|+|x+2|<11 \Longleftrightarrow -x+3-x-2<11 \Longleftrightarrow x>-5$$

(b) Se $-2\leq x<3$ la disequazione si riduce a

$$-x+3+x+2<11 \Longleftrightarrow 5<11$$

(c) Se $x\geq 3$ si ottiene

$$x-3+x+2<11 \Longleftrightarrow x<6$$

Allora, in definitiva la disequazione è soddisfatta per tutti i valori di x nell'intervallo $]-5,6[$.

27. Determinare a e b in modo che i punti $P\equiv\left(2,10\sqrt{2}\right)$ e $Q\equiv\left(1/2,5/2\sqrt{2}\right)$ appartengano alla curva di equazione $y=ax^b$.

Soluzione 27. Risposta: $a=5$, $b=\frac{3}{2}$.
Operando la trasformazione di coordinate

$$Y=\ln y, \quad X=\ln x$$

il problema è ricondotto alla determinazione della retta di equazione

$$Y=bX+c, \quad c=\ln a$$

passante per i punti

$$P'\equiv\left(\ln 2,\ln\left(10\sqrt{2}\right)\right), \quad Q'\equiv\left(\ln\left(1/2\right),\ln\left(5/2\sqrt{2}\right)\right).$$

Tale retta ha equazione

$$Y = \frac{3}{2}X + \ln 5$$

e quindi si ottiene

$$\begin{aligned} &b = \frac{3}{2}, \\ &c = \ln a = \ln 5 \Longrightarrow \quad a = 5. \end{aligned}$$

28. Trovare una terna (x, y, z) di interi tale che

$$x \leq y \leq z, \quad (x, y, z) \neq (1, 1, 1)\,, \quad x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

Soluzione 28. Risposta: $x = -5$, $y = 4$, $z = 4$.
Sia (x, y, z) una terna di interi tale che

(1) $x + y + z = 3$

(2) $x^3 + y^3 + z^3 = 3$

(3) $x \leq y \leq z$

(4) $(x, y, z) \neq (1, 1, 1)$.

Dall'identità

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(x + z)(y + z)$$

per (1) e (2) si ha:

$$8 = (x + y)(x + z)(y + z)$$

e quindi per (1)

$$(5) \qquad 8 = (3 - z)(3 - y)(3 - x)$$

e

$$(6) \qquad 8 = |x - 3||y - 3||z - 3|.$$

La somma di (1) è dispari, quindi o tutti e tre gli addendi sono dispari, oppure è dispari uno solo di essi. Di conseguenza, in (6), i tre fattori nel secondo membro o sono tutti pari, oppure soltanto uno di essi è pari. Ma, per (4) la prima alternativa è da escludersi. Dunque, in (6), uno dei fattori vale 8 e gli altri due valgono 1. D'altra parte, per (3), è

$$3 - x \geq 3 - y \geq 3 - z.$$

Pertanto, da (5) segue $3 - x = 8$ e $3 - y = 3 - z = -1$. In conclusione, $(x, y, z) = (-5, 4, 4)$.

29. $p \neq 73$ è un numero primo con la proprietà di dividere ogni numero naturale della forma (in base dieci) $abcdabcd$. Trovare p.

Soluzione 29. Risposta: $p = 137$.
$abcdabcd = (abcd)(10000) + abcd = (abcd)(10000 + 1) = (abcd)(10001)$ e $10001 = 73 \times 137$.

30. Nel sistema di assi cartesiani ortonormali Oxy sono dati i punti $A \equiv (2,0)$, $B \equiv (0,2)$. Siano H e K rispettivamente i punti di intersezione delle perpendicolari condotte da A e B alla retta $y = mx$. Quanto vale $|AH|^2 + |BK|^2$ al variare di m?

Soluzione 30. Risposta: 4.
$|OA| = |OB| = 2$
$|H\widehat{O}A| = \alpha, |H\widehat{A}O| = \frac{\pi}{2} - \alpha = |H\widehat{O}B|$.
$|AH| = |OA| \sin\alpha$
$|BK| = |OB| \cos\alpha = |OA| \cos\alpha$
$|AH|^2 + |BK|^2 = |OA|^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = |OA|^2 = 4$ indipendentemente da m.

SEZIONE C: PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

31. Internamente al quadrato $ABCD$ si costruisca il triangolo isoscele ABE, di base AB e con angoli alla base $E\widehat{A}B$, $E\widehat{B}A$ di $15°$ gradi. Dimostrare che il triangolo ECD è equilatero.

Soluzione 31. Chiaramente, avendo due lati e l'angolo compreso congruenti, i due triangoli $\triangle EAD$ e $\triangle EBC$ sono congruenti. Dunque $|ED| = |EC|$.
Se fosse $|ED| < |CD|$, sarebbe $|C\widehat{E}D| > 60°$, quindi $|D\widehat{E}A| < 75°$ e così $|AD| < |ED| < |CD|$. Un assurdo. D'altra parte, se fosse $|ED| > |CD|$, le disuguaglianze precedenti si muterebbero in quelle opposte, così ottenendo ancora un assurdo.
Pertanto $|ED| = |CD|$ e $\triangle ECD$ è equilatero.

32. Dimostare che se a e b sono numeri reali positivi con $a < b$, allora

$$\min_{a\leq p\leq b}\ \max_{a\leq x\leq b} |p-x| = \frac{b-a}{2}$$

Soluzione 32. Fissato $p \in [a,b]$, la funzione

$$f_p(x) = |p-x| = \begin{cases} p-x, & \text{se } a \leq x \leq p; \\ x-p, & \text{se } p \leq x \leq b \end{cases}$$

decresce dal valore $f_p(a) = p-a$ al valore $f_p(p) = 0$ e poi cresce da 0 a $f_p(b) = b-p$, quindi il suo massimo è raggiunto in a oppure in b, cioè si ha

$$\max_{a\leq x\leq b} |p-x| = \max\{p-a, b-p\}.$$

Basta perciò dimostrare che

$$\min_{a\leq p\leq b} \max\{p-a, b-p\} = \frac{b-a}{2}.$$

Si vede subito che

$$\max\{p-a, b-p\} \geq \frac{b-a}{2}$$

per ogni $a \leq p \leq b$.
Inoltre, scegliendo $p = \dfrac{a+b}{2}$, si ha

$$\max\left\{\frac{a+b}{2} - a, b - \frac{a+b}{2}\right\} = \max\left\{\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right\} = \frac{b-a}{2}.$$

33. Data la successione

$$x_{n+1} = x_n + \cos x_n \qquad x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Dimostrare che

(a) $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) la successione è crescente.

Infine, calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Soluzione 33. Proviamo (a). Si ha

$$x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \cos x_0 > 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 + \cos x_0 > x_0 > -\frac{\pi}{2}.$$

Inoltre

$$\frac{\pi}{2} - x_0 > 0 \Longrightarrow \cos x_0 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) > 0,$$

e quindi, essendo

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) < \frac{\pi}{2} - x_0,$$

si ha

$$x_1 = x_0 + \cos x_0 = x_0 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) < x_0 + \frac{\pi}{2} - x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

In definitiva:

$$x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow x_1 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

In modo del tutto analogo si prova che

$$x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow x_{n+1} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per induzione si ottiene quindi l'asserto in (a).
Proviamo (b). Essendo $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\cos x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$x_{n+1} = x_n + \cos x_n > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calcoliamo il limite. La successione è crescente e limitata, quindi converge verso il suo estremo superiore $\bar{x}$. Passando al limite si trova: $\bar{x} = \bar{x} + \cos\bar{x}$, da cui $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$.