Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 4 Aprile 2014
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 24 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I sei problemi numerati da 16 a 21, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 22, 23 e 24, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 10.

- Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 2** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. Individuare l'unico risultato non corretto.

(A) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

(B) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n+1}} = e^{1/2}.$

(C) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^3+3}{2n^2+1}} = e^{1/2}.$

(D) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+3}{2n+1}} = 1.$

(E) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2n+1}} = 0.$

Problema 2. Indicato con n un intero maggiore di 4, individuare quale tra le espressioni proposte si identifica con la seguente somma:

$$\sum_{k=3}^{n-1}(2k+1)\,.$$

(A) $(n-3)n.$

(B) $(n+3)(n-1).$

(C) $(n-3)(n+3).$

(D) $(n-3)^2.$

(E) $(n-1)n.$

Problema 3. Convenuto che $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ e $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$, individuare l'insieme delle soluzioni della seguente equazione:

$$\cos 2x + 3\sin^2 x = \frac{3}{2}.$$

(A) $\left\{x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

(B) $\left\{x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi : k\in\mathbb{N}_0\right\}$

(C) $\left\{x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

[1] Dappertutto nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto del piano è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB); un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua i due segmenti che formano l'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); la lunghezza di un segmento è indicata con la sovralineatura sulle due lettere che individuano il segmento (ad esempio, $\overline{AB}$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x.

(D) $\left\{x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{N}_0\right\}$

(E) $\left\{x = \frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

Problema 4. Individuare l'unica affermazioni falsa.

(A) Ogni successione limitata è convergente.

(B) Ogni successione convergente è limitata.

(C) Il prodotto di una successione limitata per una successione infinitesima produce una successione infinitesima.

(D) Ogni successione monotona ammette limite.

(E) Se una successione è divergente la successione dei suoi reciproci è infinitesima.

Problema 5. Individuare l'unica affermazione vera sapendo che l'affermazione "Tutti i lunedì frequento sia il corso di teoria che quello di laboratorio." è falsa.

(A) Qualche lunedì non frequento né il corso di teoria né quello di laboratorio.

(B) Il lunedì frequento il corso di teoria, ma non quello di laboratorio.

(C) Qualche lunedì non frequento il corso di teoria oppure non frequento quello di laboratorio.

(D) Il lunedì non frequento il corso di teoria oppure non frequento quello di laboratorio.

(E) Qualche lunedì non frequento il corso di laboratorio, ma frequento quello di teoria.

Problema 6. Indicati con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Individuare l'unica affermazione vera.

(A) La funzione f non è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(B) La funzione f è continua per ogni $x \in \mathbb{Q}$.

(C) La funzione f è continua in $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(D) La funzione f è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(E) La funzione f è continua in un solo punto.

Problema 7. Considerata l'equazione di secondo grado $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ a coefficienti nel campo dei numeri reali, individuare quale tra le seguenti affermazioni è quella vera.

(A) L'equazione rappresenta una circonferenza.

(B) L'equazione rappresenta un punto.

(C) L'equazione rappresenta un'ellisse con eccentricità positiva.

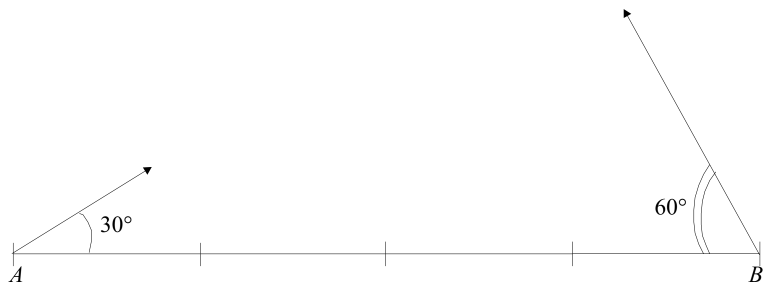

Figura 1: ad illustrazione del Problema 8.

(D) L'equazione rappresenta un'iperbole.

(E) Nessuna delle precedenti.

Problema 8. La barca di Anna si trova a capo A, quella di Baldo a capo B ad una distanza di 4 Km l'una dall'altra. Entrambe salpano e viaggiano in linea retta nelle direzioni indicate nella Figura 1. Dopo aver percorso, rispettivamente, 1 Km e 3 Km, ciascuna nella propria direzione, le due barche vengono ancorate al fondo marino. A quale distanza si troveranno Anna e Baldo?

(A) $\dfrac{\sqrt{88-48\sqrt{3}}}{2}$ Km.

(B) $\sqrt{14-4\sqrt{3}}$ Km.

(C) $\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Km.

(D) $\sqrt{13}$ Km.

(E) $7-4\sqrt{3}$ Km.

Problema 9. Individuare il dominio X della funzione:

$$f(x)=\ln\left[\log_{1/3}\left(\ln^2 x-\sqrt{5}\ln x\right)\right].$$

(A) $X=\left]e^{(\sqrt{5}-3)/2},1\right[$.

(B) $X=\left[e^{(\sqrt{5}-3)/2},1\right[\bigcup\left]e^{\sqrt{5}},e^{(\sqrt{5}+3)/2}\right]$.

(C) $X=\left]e^{(\sqrt{5}-3)/2},1\right]\bigcup\left[e^{\sqrt{5}},e^{(\sqrt{5}+3)/2}\right[$.

(D) $X=\left]e^{(\sqrt{5}-3)/2},1\right[\bigcup\left]e^{\sqrt{5}},e^{(\sqrt{5}+3)/2}\right[$.

(E) $X=\left]e^{\sqrt{5}},e^{(\sqrt{5}+3)/2}\right[$.

Problema 10. Si convenga di denotare con *testa* una delle due facce di una moneta da un Euro. Due giocatori si accordano per giocare una partita nella quale la moneta viene lanciata dieci volte. Quante sono le partite diverse nelle quali si osserva l'uscita della quinta testa esattamente al decimo lancio?

(A) 126.

(B) 252.

(C) 732.

(D) 495.

(E) 10.

Problema 11. Si considerino le funzioni aventi per dominio l'insieme dei numeri reali. La composizione di una funzione pari con una funzione dispari è:

(A) una funzione dispari.

(B) la funzione identicamente nulla.

(C) dipende dall'ordine con cui si compone.

(D) una funzione pari.

(E) non si possono comporre funzioni pari con funzioni dispari.

Problema 12. Si associ ad ogni nome proprio degli alunni di una assegnata classe la lettera dell'alfabeto (inglese) che ne è l'iniziale. Si individui la caratteristica di questa associazione.

(A) Si ottiene una applicazione iniettiva.

(B) Si ottiene una applicazione suriettiva.

(C) Non si può dire nulla.

(D) Non si ottiene una applicazione.

(E) Si ottiene una applicazione biettiva.

Problema 13. Sia $f : [-1, 1] \to]0, +\infty[$ una funzione dispari. Si individui l'unica affermazione vera.

(A) f è continua in $x = 0$.

(B) f è la funzione nulla.

(C) $f(-1) = f(1)$.

(D) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(E) non esiste una tale f.

Problema 14. Se

$$a = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}, \quad b = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}} \quad \text{e} \quad c = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

si individui l'unico numero reale x tale che $a + b + cx = 2$.

(A) $x = (1 + \sqrt{5})/2$.

(B) $x = 2$.

(C) $x = 0$.

(D) $x = (1 - \sqrt{5})/2$.

(E) $x = 1$.

(Suggerimento: si osservi che $b^2 = 1 + b$; analogamente $a = 1 + \cdots$.)

Problema 15. Si individui l'unica affermazione corretta.

(A) Esiste un unico primo p tale che anche $17p + 1$ sia un quadrato.

(B) Esistono almeno due primi p tali che $17p + 1$ sia un quadrato.

(C) Esistono almeno tre primi p tali che $17p + 1$ sia un quadrato.

(D) Esistono almeno quattro primi p tali che $17p + 1$ sia un quadrato.

(E) Non esiste alcun primo p tale che anche $17p + 1$ sia un quadrato.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Un nuotatore deve attraversare un fiume per portarsi da una località A ad una località B, sulla sponda opposta; egli è al corrente che la direzione AB è ortogonale alle rive. Il

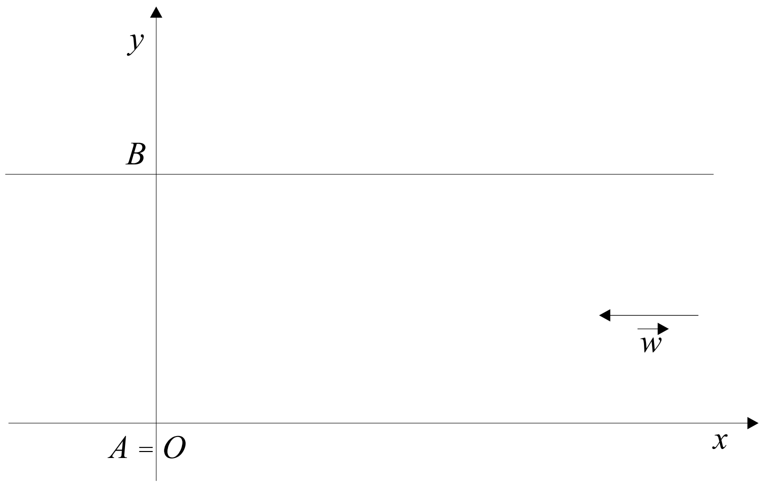

Figura 2: ad illustrazione del Problema 16.

nuotatore, muovendosi in linea retta, sviluppa una velocità costante $v = 4$ Km/h e la corrente si muove ad una velocità costante $w = 2$ Km/h parallela alle rive. Si scelga il riferimento cartesiano come indicato nella Figura 2, nel quale cioè il punto A risulti l'origine e la corrente tiri nel verso indicato. In quale direzione, rispetto all'asse y, deve nuotare l'atleta per raggiungere il punto B?

Problema 17. Indicati con x, y e z tre numeri reali in progressione aritmetica, determinare

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

in funzione della sola y.

Problema 18. Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x + \ln^5 x + 7}{x + \ln^5 x} \right)^x .$$

Problema 19. Stabilire per quali valori reali del parametro k l'equazione

$$\frac{x^2}{k+1} + \frac{y^2}{2k-4} = 1, \tag{1}$$

rappresenta una iperbole equilatera.

Problema 20. Sia $A := \{3, 6, 9, \ldots\}$, $B := \{1, 3, 5, \ldots\}$ e g la funzione che ad ogni $x \in B$ assegna il valore $g(x) = (x+2)/x$. Determinare la funzione f da A a B che fa coincidere la funzione composta di f e g con la funzione identica.

Problema 21. Nel triangolo rettangolo ABC, con l'angolo $A\widehat{C}B$ retto, siano CH l'altezza relativa all'ipotenusa AB, M il punto medio di CH, C' il punto medio di AH, B' il punto medio di AC, $r = \overline{BM}$, $s = \overline{CC'}$, $t = \overline{BB'}$. Sapendo che $s = 21$ e $t = 29$, quanto vale r?

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 22. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Dimostrare che se i lati soddisfano la condizione

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2. \tag{2}$$

allora le diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ sono ortogonali.
(Suggerimento: si considerino i vettori del piano rappresentanti i lati del quadrilatero e si ricordi che il prodotto scalare di un vettore $\vec{v}$ per se stesso fornisce il quadrato del modulo del vettore: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$.)

Problema 23. Si consideri la funzione:

$$f(x) := \begin{cases} x^3 + x - 1, & x \in]-\infty, 1], \\ x - 1, & x \in]2, +\infty[. \end{cases}$$

(i) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ e fornire per almeno una di esse un'approssimazione avente errore minore di $5 \cdot 10^{-2}$.

(ii) Stabilire se la funzione f è invertibile nel suo insieme di definizione e nel caso affermativo verificare se la sua inversa è una funzione continua nel proprio insieme di definizione.

Problema 24. Sia ABC un triangolo isoscele, con $\overline{AC} = \overline{BC}$. Dimostrare che la somma delle distanze $d_{AC} + d_{BC}$ di un punto P di AB dai lati AC e BC è costante.