Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 4 Aprile 2014
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 24 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I sei problemi numerati da 16 a 21, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 22, 23 e 24, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 10.

- Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 2** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. Individuare l'unico risultato non corretto.

(A) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

(B) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n+1}} = e^{1/2}.$

(C) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^3+3}{2n^2+1}} = e^{1/2}.$

(D) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+3}{2n+1}} = 1.$

(E) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2n+1}} = 0.$

Soluzione 1. Il risultato errato è quello della risposta contrassegnata con (E). Risulta correttamente:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e,$$

$$\text{(B)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n+1}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{n+3/n}{n+1/2}} = e^{1/2},$$

$$\text{(C)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^3+3}{2n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+3/n^2}{2+1/n^2}} = e^{1/2},$$

$$\text{(D)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+3}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1+3/n}{2+1/n}} = 1^{1/2} = 1.$$

Per la (E), invece, si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2n+1}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{2n+1}} = 1^0 = 1.$$

Problema 2. Indicato con n un intero maggiore di 4, individuare quale tra le espressioni proposte si identifica con la seguente somma:

$$\sum_{k=3}^{n-1}(2k+1)\,.$$

(A) $(n-3)n.$

(B) $(n+3)(n-1).$

[1] Dappertutto nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto del piano è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB); un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua i due segmenti che formano l'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); la lunghezza di un segmento è indicata con la sovralineatura sulle due lettere che individuano il segmento (ad esempio, $\overline{AB}$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x.

(C) $(n-3)(n+3)$.

(D) $(n-3)^2$.

(E) $(n-1)n$.

Soluzione 2. La risposta esatta è quella contrassegnata con (C). Ricordando che

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2},$$

si ha:

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n-1}(2k+1) &= 2\left[\frac{(n-1)n}{2}-3\right]+[(n-1)-2] = (n-1)n-6+n-3 = n^2-9 \\ &= (n-3)(n+3).\end{aligned}$$

Problema 3. Convenuto che $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ e $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$, individuare l'insieme delle soluzioni della seguente equazione:

$$\cos 2x + 3\sin^2 x = \frac{3}{2}.$$

(A) $\left\{x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

(B) $\left\{x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{N}_0\right\}$

(C) $\left\{x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

(D) $\left\{x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{N}_0\right\}$

(E) $\left\{x = \frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

Soluzione 3. La risposta esatta è quella contrassegnata con (A). Per $x \in (-\pi,\pi)$, si ha:

$$\begin{aligned}\cos 2x + 3\sin^2 x = \frac{3}{2} &\iff 1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x = \frac{3}{2} \\ &\iff \sin^2 x = \frac{1}{2} \iff \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff x = -\frac{3\pi}{4} \text{ oppure } x = \frac{3\pi}{4} \text{ oppure } x = -\frac{\pi}{4} \text{ oppure } x = \frac{\pi}{4}\pi.\end{aligned}$$

Tenendo conto della periodicità della funzione seno, ciascuno dei precedenti valori di x incrementato o decrementato di un multiplo di 2π risulta essere ancora una soluzione. D'altra parte, con $k \in \mathbb{Z}$, risulta:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi \quad \text{e} \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi.$$

Se ne conclude che l'insieme delle soluzioni dell'equazione assegnata è individuato soltanto dai valori $-\pi/4$ e $\pi/4$ ai quali vanno aggiunti tutti i multipli positivi e negativi di π.

Problema 4. Individuare l'unica affermazioni falsa.

(A) Ogni successione limitata è convergente.

(B) Ogni successione convergente è limitata.

(C) Il prodotto di una successione limitata per una successione infinitesima produce una successione infinitesima.

(D) Ogni successione monotona ammette limite.

(E) Se una successione è divergente la successione dei suoi reciproci è infinitesima.

Soluzione 4. L'affermazione falsa è quella contrassegnata con (A). Se $\mathbb{N}$ designa l'insieme dei numeri interi, basta considerare la successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che è limitata ma non convergente.

Problema 5. Individuare l'unica affermazione vera sapendo che l'affermazione "Tutti i lunedì frequento sia il corso di teoria che quello di laboratorio." è falsa.

(A) Qualche lunedì non frequento né il corso di teoria né quello di laboratorio.

(B) Il lunedì frequento il corso di teoria, ma non quello di laboratorio.

(C) Qualche lunedì non frequento il corso di teoria oppure non frequento quello di laboratorio.

(D) Il lunedì non frequento il corso di teoria oppure non frequento quello di laboratorio.

(E) Qualche lunedì non frequento il corso di laboratorio, ma frequento quello di teoria.

Soluzione 5. L'affermazione che nega la frase assegnata è quella contrassegnata con (C). Per negare la frase basta verificare che in un qualche lunedì la persona non ha frequentato il corso di teoria.

Problema 6. Indicati con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Individuare l'unica affermazione vera.

(A) La funzione f non è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(B) La funzione f è continua per ogni $x \in \mathbb{Q}$.

(C) La funzione f è continua in $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(D) La funzione f è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(E) La funzione f è continua in un solo punto.

Soluzione 6. L'affermazione vera è quella contrassegnata con (E). La funzione f è continua in $x = 0$ dal momento che essa assume valore nullo sugli irrazionali e tende a 0 su ogni successione infinitesima costituita da razionali. Per tutti gli altri numeri reali $x \neq 0$ ciò non avviene in quanto il limite di f sulle successioni convergenti a x vale $x^2 \neq 0$ mentre, come già detto in precedenza, essa assume il valore 0 sui numeri irrazionali.

Problema 7. Considerata l'equazione di secondo grado $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ a coefficienti nel campo dei numeri reali, individuare quale tra le seguenti affermazioni è quella vera.

(A) L'equazione rappresenta una circonferenza.

(B) L'equazione rappresenta un punto.

(C) L'equazione rappresenta un'ellisse con eccentricità positiva.

(D) L'equazione rappresenta un'iperbole.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione 7. L'affermazione vera è quella contrassegnata con (A). Osservando che

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 1 = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 1$$

l'equazione assegnata può essere riscritta come

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

e pertanto essa rappresenta la circonferenza con il centro nel punto di coordinate $(2, 2)$ e raggio 1.

Problema 8. La barca di Anna si trova a capo A, quella di Baldo a capo B ad una distanza di 4 Km l'una dall'altra. Entrambe salpano e viaggiano in linea retta nelle direzioni indicate nella Figura 1. Dopo aver percorso, rispettivamente, 1 Km e 3 Km, ciascuna nella propria direzione, le

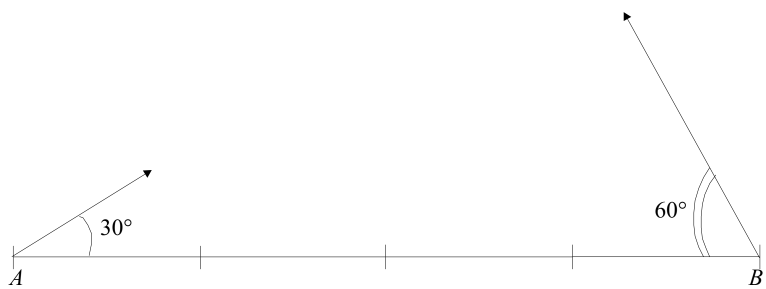

Figura 1: ad illustrazione del Problema 8.

due barche vengono ancorate al fondo marino. A quale distanza si troveranno Anna e Baldo?

(A) $\dfrac{\sqrt{88 - 48\sqrt{3}}}{2}$ Km.

(B) $\sqrt{14 - 4\sqrt{3}}$ Km.

(C) $\dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Km.

(D) $\sqrt{13}$ Km.

(E) $7 - 4\sqrt{3}$ Km.

Soluzione 8. La distanza tra Anna e Baldo è quella contrassegnata con (B). Con riferimento alla Figura 2 e convenendo di misurare le lunghezze in Km e gli angoli in gradi, risulta $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 1$, $\overline{BD} = 3$, $\alpha = 30$ e $\beta = 60$. Dopo di ciò, considerando i triangoli rettangoli AHC e BKD, il teorema dei seni consente di ottenere:

$$\overline{AH} = \overline{AC}\cos\alpha = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \overline{HC} = \overline{AC}\sin\alpha = \sin 30 = \frac{1}{2},$$
$$\overline{KB} = \overline{BD}\cos\beta = 3\cos 60 = \frac{3}{2}, \qquad \overline{KD} = \overline{BD}\sin\beta = 3\sin 60 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ciò consente di determinare le lunghezze dei cateti del triangolo rettangolo CED:

$$\overline{CE} \equiv \overline{HK} = \overline{AB} - \overline{AH} - \overline{KB} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\overline{ED} = \overline{KD} - \overline{KE} \equiv \overline{KD} - \overline{HC} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

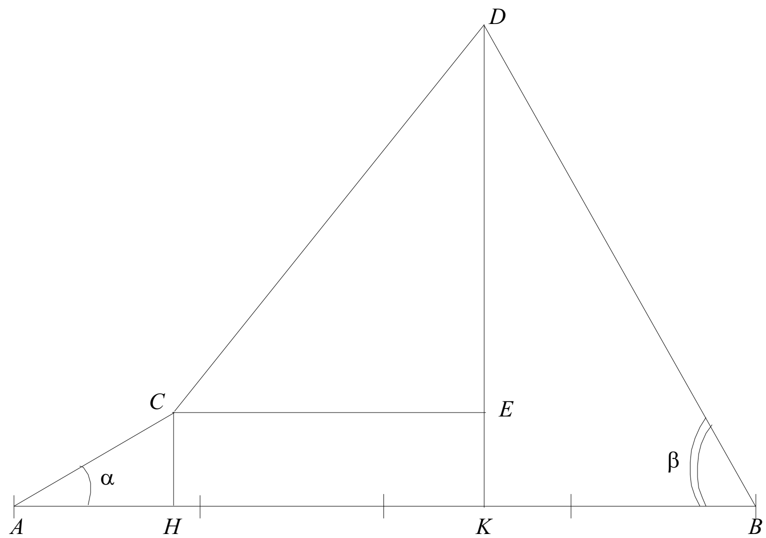

Figura 2: ad illustrazione della soluzione del Problema 8.

In definitiva, applicando il teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(\overline{CE}\right)^2 + \left(\overline{ED}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{25 - 10\sqrt{3} + 3 + 27 - 6\sqrt{3} + 1}{4}} = \sqrt{14 - 4\sqrt{3}}.$$

Problema 9. Individuare il dominio X della funzione:

$$f(x) = \ln\left[\log_{1/3}\left(\ln^2 x - \sqrt{5}\ln x\right)\right].$$

(A) $X = \left]e^{(\sqrt{5}-3)/2}, 1\right[$.

(B) $X = \left[e^{(\sqrt{5}-3)/2}, 1\right[\bigcup \left]e^{\sqrt{5}}, e^{(\sqrt{5}+3)/2}\right]$.

(C) $X = \left]e^{(\sqrt{5}-3)/2}, 1\right] \bigcup \left[e^{\sqrt{5}}, e^{(\sqrt{5}+3)/2}\right[$.

(D) $X = \left]e^{(\sqrt{5}-3)/2}, 1\right[\bigcup \left]e^{\sqrt{5}}, e^{(\sqrt{5}+3)/2}\right[$.

(E) $X = \left]e^{\sqrt{5}}, e^{(\sqrt{5}+3)/2}\right[$.

Soluzione 9. Il dominio della funzione assegnata è quello contrassegnato da (D). Ricordando che l'argomento della funzione logaritmo (con qualsiasi base) deve essere un reale positivo e che il logaritmo con base minore di uno risulta essere positivo solo per argomenti compresi fra zero ed uno, risulta:

$$\log_{1/3}\left(\ln^2 x - \sqrt{5}\ln x\right) > 0 \iff 0 < \ln^2 x - \sqrt{5}\ln x < 1$$
$$\iff \begin{cases} \ln x(\ln x - \sqrt{5}) > 0 \\ \ln^2 x - \sqrt{5}\ln x - 1 < 0 \end{cases}$$

Per la prima disequazione si ha:

$$\ln x(\ln x - \sqrt{5}) > 0 \iff \begin{cases} \ln x > 0 \\ \ln x > \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \ln x < 0 \\ \ln x < \sqrt{5} \end{cases}$$

da cui si ricava $x > e^{\sqrt{5}}$ oppure $0 < x < 1$.
Per la seconda disequazione, posto, per ogni $x > 0$, $y = \ln x$, la disequazione $y^2 - \sqrt{5}y - 1 < 0$ ha per soluzione l'insieme:

$$Y = \left] \frac{\sqrt{5}-3}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2} \right[.$$

Da Y, tenendo conto del fatto che la funzione esponenziale con base e è crescente e del fatto che $0 < x < 1$ e $x > e^{\sqrt{5}}$ si ottiene:

$$X = \left] e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}, 1 \right[\bigcup \left] e^{\sqrt{5}}, e^{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} \right[.$$

Problema 10. Si convenga di denotare con *testa* una delle due facce di una moneta da un Euro. Due giocatori si accordano per giocare una partita nella quale la moneta viene lanciata dieci volte. Quante sono le partite diverse nelle quali si osserva l'uscita della quinta testa esattamente al decimo lancio?

(A) 126.

(B) 252.

(C) 732.

(D) 495.

(E) 10.

Soluzione 10. La soluzione è quella contrassegnata con (A). Denotando con *croce* l'altra faccia, se al decimo lancio si osserva la quinta testa se ne deduce che nei nove lanci precedenti si sono osservate quattro teste (T) e cinque croci (C).
Il numero da individuare coincide allora con il numero delle permutazioni con ripetizione di lunghezza nove che presentano quattro T e cinque C:

$$P^{(\mathrm{r})}_{9;4,5} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 6}{3} = 126.$$

Una maniera alternativa per ottenere lo stesso risultato è quella di contare il numero delle combinazioni semplici di lunghezza quattro dall'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; in questa visione ogni elemento della combinazione rappresenta l'ordine del lancio nel quale si è presentata la testa:

$$C_{9,4} = \binom{9}{4} = 126.$$

Problema 11. Si considerino le funzioni aventi per dominio l'insieme dei numeri reali. La composizione di una funzione pari con una funzione dispari è:

(A) una funzione dispari.

(B) la funzione identicamente nulla.

(C) dipende dall'ordine con cui si compone.

(D) una funzione pari.

(E) non si possono comporre funzioni pari con funzioni dispari.

Soluzione 11. La soluzione è quella contrassegnata con (D). Si indichi con f la funzione più interna e con g l'altra funzione. Se f è dispari e g è pari, si ha

$$g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)].$$

Se, invece, f è pari e g è dispari, si ha:

$$g[f(-x)] = g[f(x)].$$

In ogni caso la funzione composta assume lo stesso valore su $-x$ e x.

Problema 12. Si associ ad ogni nome proprio degli alunni di una assegnata classe la lettera dell'alfabeto (inglese) che ne è l'iniziale. Si individui la caratteristica di questa associazione.

(A) Si ottiene una applicazione iniettiva.

(B) Si ottiene una applicazione suriettiva.

(C) Non si può dire nulla.

(D) Non si ottiene una applicazione.

(E) Si ottiene una applicazione biettiva.

Soluzione 12. La soluzione è quella contrassegnata con (C). Infatti, per una generica classe, si tratta di una applicazione in quanto ad ogni nome viene associata una ed una sola iniziale. Non si ottiene una applicazione iniettiva in presenza di una classe nella quale due allievi hanno nomi propri che iniziano con la stessa lettera. Non si ottiene una applicazione suriettiva in presenza di una classe nella quale almeno una lettera dell'alfabeto non è iniziale di uno dei nomi propri degli allievi. Per una classe di uno dei tipi precedenti non si ottiene ovviamente una applicazione biettiva.

Problema 13. Sia $f : [-1, 1] \to]0, +\infty[$ una funzione dispari. Si individui l'unica affermazione vera.

(A) f è continua in $x = 0$.

(B) f è la funzione nulla.

(C) $f(-1) = f(1)$.

(D) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(E) non esiste una tale f.

Soluzione 13. La soluzione è quella contrassegnata con (E). Infatti f dispari fornisce $f(-x) = -f(x)$ e poichè f può assumere solo valori positivi tale condizione non può essere soddisfatta. Si osservi che l'affermazione in (B) è da scartare in quanto 0 non appartiene al codominio di f.

Problema 14. Se

$$a = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}, \quad b = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}} \quad \text{e} \quad c = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

si individui l'unico numero reale x tale che $a + b + cx = 2$.

(A) $x = (1 + \sqrt{5})/2$.

(B) $x = 2$.

(C) $x = 0$.

(D) $x = (1 - \sqrt{5})/2$.

(E) $x = 1$.

(Suggerimento: si osservi che $b^2 = 1 + b$; analogamente $a = 1 + \cdots$.)

Soluzione 14. La soluzione è quella contrassegnata con (B). Infatti, si osservi che risulta $a = 1 + 1/a \iff a^2 = 1 + a$ e $b^2 = b + 1$ e quindi $a = b = (1 + \sqrt{5})/2$. Dopo di ciò:

$$2a + cx = 2 \iff cx = 2 - 2a \iff \frac{1 - \sqrt{5}}{2} x = 1 - \sqrt{5} \iff x = 2.$$

Problema 15. Si individui l'unica affermazione corretta.

(A) Esiste un unico primo p tale che anche $17p + 1$ sia un quadrato.

(B) Esistono almeno due primi p tali che $17p + 1$ sia un quadrato.

(C) Esistono almeno tre primi p tali che $17p + 1$ sia un quadrato.

(D) Esistono almeno quattro primi p tali che $17p + 1$ sia un quadrato.

(E) Non esiste alcun primo p tale che anche $17p + 1$ sia un quadrato.

Soluzione 15. La soluzione è quella contrassegnata con (A). Infatti, sia p un primo ed esista un intero positivo a tale che $17p + 1 = a^2$. Ne segue che $17p = (a - 1)(a + 1)$, da cui

$$\begin{cases} 17 = a - 1 \\ p = a + 1 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 17 = a + 1 \\ p = a - 1. \end{cases}$$

Il primo sistema conduce a $17 - p = a - 1 - a - 1 \iff 17 - p = -2 \iff p = 19$, soluzione accettabile in quanto 19 è primo. Il secondo sistema conduce a $17 - p = a + 1 - a + 1 \iff 17 - p = 2 \iff p = 15$, soluzione non accettabile in quanto 15 è composto.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Un nuotatore deve attraversare un fiume per portarsi da una località A ad una località B, sulla sponda opposta; egli è al corrente che la direzione AB è ortogonale alle rive. Il

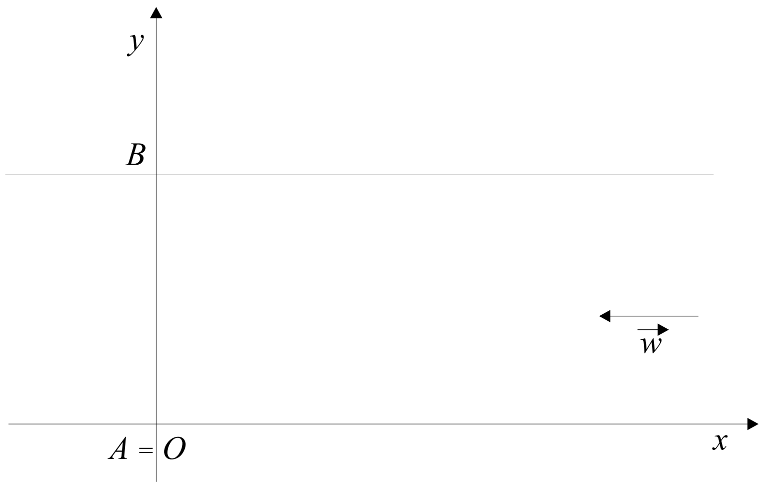

Figura 3: ad illustrazione del Problema 16.

nuotatore, muovendosi in linea retta, sviluppa una velocità costante $v = 4$ Km/h e la corrente si muove ad una velocità costante $w = 2$ Km/h parallela alle rive. Si scelga il riferimento cartesiano come indicato nella Figura 3, nel quale cioè il punto A risulti l'origine e la corrente tiri nel verso indicato. In quale direzione, rispetto all'asse y, deve nuotare l'atleta per raggiungere il punto B?

Soluzione 16. Si indichino con $\vec{i}$ e $\vec{j}$ i vettori unitari nella direzione dell'asse x e dell'asse y, rispettivamente. Possiamo affermare che per raggiungere lo scopo il nuotatore dovrà seguire una direzione che formi con l'asse y un angolo, diciamolo θ, tale che il vettore $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ abbia la direzione (e, ovviamente, il verso) dell'asse y. Il vettore $\vec{u}$ rappresenta in questo modo la velocità effettiva del nuotatore nella direzione $\overrightarrow{AB}$. Ora, risultando che $\vec{w} = -w\,\vec{i}$ e $\vec{v} = v \sin\theta\,\vec{i} + v\cos\theta\,\vec{j}$, affinché $\vec{u}$ abbia la direzione dell'asse y, occorre che la sua componente sull'asse x sia nulla e cioè deve essere $v\sin\theta - w = 0$ da cui:

$$\theta = \arcsin\frac{w}{v} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Problema 17. Indicati con x, y e z tre numeri reali in progressione aritmetica, determinare

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

in funzione della sola y.

Soluzione 17. In primo luogo si scriva $x = y - h$ e $z = x + h$; applicando le formule di addizione e sottrazione si ha poi:

$$\begin{aligned}
\sin(y-h) + \sin(y+h) &= \sin y\cos h - \cos y \sin h + \sin y \cos h + \cos y \sin h = 2\sin y\cos h \\
\cos(y-h) + \cos(y+h) &= \cos y\cos h + \sin y \sin h + \cos y \cos h - \sin y \sin h = 2\cos y\cos h.
\end{aligned}$$

Dopo di ciò, si ricava:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z} &= \frac{\sin(y-h) + \sin(y+h) + \sin y}{\cos(y-h) + \cos(y+h) + \cos y} \\
&= \frac{2\sin y\cos h + \sin y}{2\cos y \cos h + \cos y} = \frac{\sin y(1 + 2\cos h)}{\cos y(1 + 2\cos h)} \\
&= \tan y.
\end{aligned}$$

Problema 18. Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln^5 x+7}{x+\ln^5 x}\right)^x.$$

Soluzione 18. Si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln^5 x}{7}=+\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\ln^5 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{\ln^5 x}{x}}=1.$$

Dopo di ciò, si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln^5 x+7}{x+\ln^5 x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x+\ln^5 x\right)+7}{x+\ln^5 x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x+\ln^5 x}\right)^x\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x+\ln^5 x}\right)^{x\frac{7(x+\ln^5 x)}{7(x+\ln^5 x)}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{7}{x+\ln^5 x}\right)^{\frac{x+\ln^5 x}{7}}\right]^{\frac{7x}{x+\ln^5 x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{7}{x+\ln^5 x}\right)^{\frac{x+\ln^5 x}{7}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x}{x+\ln^5 x}}\\
&= e^7.
\end{aligned}$$

Problema 19. Stabilire per quali valori reali del parametro k l'equazione

$$\frac{x^2}{k+1}+\frac{y^2}{2k-4}=1, \tag{1}$$

rappresenta una iperbole equilatera.

Soluzione 19. Si interpreti, in primo luogo, l'equazione (1) come equazione di un luogo $\mathcal{C}$ di punti del piano rispetto al sistema di riferimento Oxy; $\mathcal{C}$ risulterà essere una iperbole nel caso in cui i denominatori di x^2 e y^2 hanno segno opposto. L'imposizione di tale condizione conduce a scrivere

$$\begin{cases} k+1>0\\ 2k-4<0\end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} k+1<0\\ 2k-4>0\end{cases}$$

dalle quali si conclude che, affinché il luogo $\mathcal{C}$ rappresenti una iperbole, deve essere $-1<k<2$. Per un valore di k in tale intervallo $\mathcal{C}$ è una iperbole riferita all'asse x rappresentata dall'equazione

$$\frac{x^2}{k+1}-\frac{y^2}{4-2k}=1,$$

con asintoti di equazione:

$$y=\pm\sqrt{\frac{4-2k}{k+1}}x.$$

Pertanto, affinché $\mathcal{C}$ sia un'iperbole equilatera deve avere gli asintoti ortogonali e questo comporta:

$$-\sqrt{\frac{4-2k}{k+1}}\sqrt{\frac{4-2k}{k+1}}=-1 \iff 4-2k=k+1 \iff k=1.$$

Problema 20. Sia $A := \{3, 6, 9, \ldots\}$, $B := \{1, 3, 5, \ldots\}$ e g la funzione che ad ogni $x \in B$ assegna il valore $g(x) = (x+2)/x$. Determinare la funzione f da A a B che fa coincidere la funzione composta di f e g con la funzione identica.

Soluzione 20. Si indichino con n e m due interi positivi; allora $3n$ rappresenta il generico elemento di A e $2m - 1$ il generico elemento di B. Deve risultare $f(3n) = 2m_n - 1$ con m_n intero positivo da determinare, per ogni n, mediante la condizione:

$$g[f(3n)] = 3n \iff \frac{(2m_n - 1) + 2}{2m_n - 1} = 3n \iff \frac{2m_n + 1}{2m_n - 1} = 3n.$$

La risoluzione dell'ultima equazione conduce a scrivere:

$$m_n = \frac{3n + 1}{2(3n - 1)}.$$

Risulta abbastanza semplice da verificare che per $n > 1$ risulta $0 < m_n < 1$. Pertanto non esiste una funzione da A a B che verifica la condizione richiesta.

Problema 21. Nel triangolo rettangolo ABC, con l'angolo $A\widehat{C}B$ retto, siano CH l'altezza relativa all'ipotenusa AB, M il punto medio di CH, C' il punto medio di AH, B' il punto medio di AC, $r = \overline{BM}$, $s = \overline{CC'}$, $t = \overline{BB'}$. Sapendo che $s = 21$ e $t = 29$, quanto vale r?

Soluzione 21. Si faccia riferimento alla Figura 4. Il lato CH divide il triangolo ABC nei due

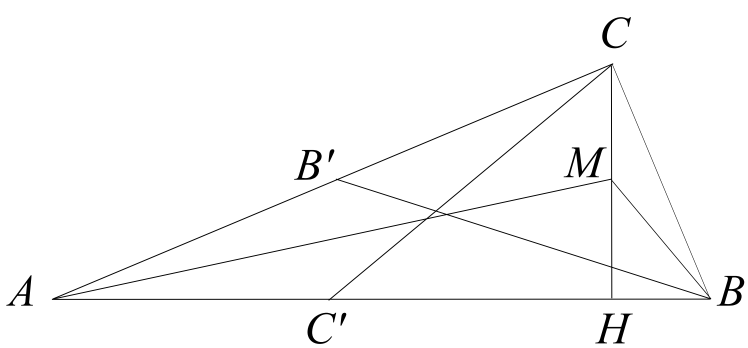

Figura 4: ad illustrazione del Problema 21.

triangoli rettangoli CAH e BCH (entrambi con l'angolo in H retto). Questi tre triangoli sono simili. Si indichino con a, b e c le lunghezze dei lati del triangolo ABC opposti, rispettivamente, ai vertici A, B e C. Dal fatto che il triangolo BCH è simile al triangolo ABC riconoscendo che BM e BB' sono mediane omologhe si ha:

$$k_a := \frac{a}{c} = \frac{r}{t}. \tag{2}$$

Analogamente, il triangolo CAH è simile al triangolo ABC, per cui riconoscendo che CC' e BB' sono mediane corrispondenti si ha:

$$k_b := \frac{b}{c} = \frac{s}{t}. \tag{3}$$

Dall'essere, per il teorema di Pitagora, $a^2 + b^2 = c^2$ dalle (2) e (3) ne segue:

$$r^2 + s^2 = (k_a t)^2 + (k_b t)^2 = (k_a + k_b)^2 t^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} t^2 = t^2.$$

In definitiva,

$$r = \sqrt{t^2 - s^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{(29 - 21)(29 + 21)} = \sqrt{8 \cdot 50} = 20.$$

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 22. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Dimostrare che se i lati soddisfano la condizione

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2. \tag{4}$$

allora le diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ sono ortogonali.
(Suggerimento: si considerino i vettori del piano rappresentanti i lati del quadrilatero e si ricordi che il prodotto scalare di un vettore $\vec{v}$ per se stesso fornisce il quadrato del modulo del vettore: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$.)

Soluzione 22. Si ponga, come nella Figura 5, $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} := \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} := \overrightarrow{CD}$ e $\vec{d} := \overrightarrow{AD}$. Osservando che il quadrato della lunghezza di un lato fornisce il quadrato del modulo del corri-

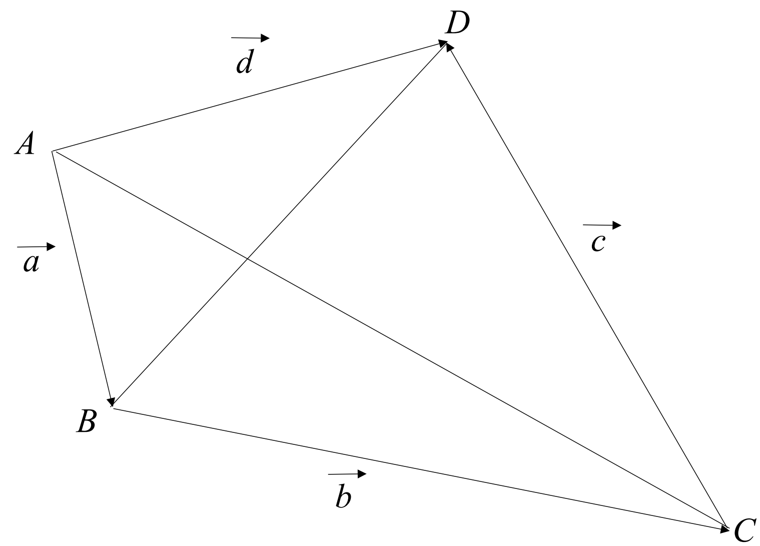

Figura 5: ad illustrazione del Problema 22.

spondente vettore, la condizione (4) diventa:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{d} \cdot \vec{d}.$$

D'altra parte, facendo uso della regola del parallelogramma per mezzo della quale

$$\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \vec{d} &= \left[(\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c}\right] \cdot \left[(\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c}\right] \\ &= (\vec{a} + \vec{b}\,) \cdot (\vec{a} + \vec{b}\,) + 2(\vec{a} + \vec{b}\,) \cdot \vec{c} + \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

In definitiva, la condizione (4) si riscrive nella forma

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c},$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= (\vec{a} + \vec{b}\,) \cdot \vec{b} + (\vec{a} + \vec{b}\,) \cdot \vec{c} \\ &= (\vec{a} + \vec{b}\,) \cdot (\vec{b} + \vec{c}\,). \end{aligned}$$

La dimostrazione che le diagonali del quadrilatero $ABCD$ con i lati verificanti la condizione (4) sono ortogonali si ottiene da quest'ultima dopo aver osservato che $(\vec{a}+\vec{b})$ è parallelo alla diagonale AC, $(\vec{b}+\vec{c})$ è parallelo alla diagonale BD e ricordando il fatto che solo per vettori ortogonali risulta nullo il prodotto scalare.
Una dimostrazione alternativa utilizzante considerazioni di tipo trigonometrico è la seguente. Con riferimento alla Figura 5 si indichi con O il punto di intersezione delle diagonali del quadrilatero e si ponga $\alpha = B\widehat{O}A$, $\beta = C\widehat{O}B$, $\gamma = D\widehat{O}C$ e $\delta = A\widehat{O}D$. Applicando il teorema del coseno, rispettivamente, ai triangoli ABO, BCO, CDO e DAO si ottiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cos\alpha; \quad \overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - 2\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cos\beta;$$
$$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 - 2\overline{CO}\cdot\overline{DO}\cos\gamma; \quad \overline{AD}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{DO}\cdot\overline{AO}\cos\delta.$$

Da queste ultime la condizione (4) si riscrive nella forma

$$-2\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cos\alpha - 2\overline{CO}\cdot\overline{DO}\cos\gamma = -2\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cos\beta - 2\overline{DO}\cdot\overline{AO}\cos\delta,$$

che, essendo $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$ e $\beta = 180° - \alpha$, diventa:

$$\left(\overline{AO}\cdot\overline{BO} + \overline{CO}\cdot\overline{DO}\right)\cos\alpha = -\left(\overline{BO}\cdot\overline{CO} + \overline{DO}\cdot\overline{AO}\right)\cos\alpha.$$

Se fosse $\cos\alpha \neq 0$ la condizione (4) non potrebbe essere verificata in quanto il primo membro e il secondo membro risulterebbero discordi; pertanto $\cos\alpha = 0 \iff \alpha = 90°$.

Problema 23. Si consideri la funzione:

$$f(x) := \begin{cases} x^3 + x - 1, & x \in]-\infty, 1], \\ x - 1, & x \in]2, +\infty[. \end{cases}$$

(i) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ e fornire per almeno una di esse un'approssimazione avente errore minore di $5 \cdot 10^{-2}$.

(ii) Stabilire se la funzione f è invertibile nel suo insieme di definizione e nel caso affermativo verificare se la sua inversa è una funzione continua nel proprio insieme di definizione.

Soluzione 23. Si indichi con f_1 la restrizione di f nell'intervallo $]-\infty, 1]$ e con f_2 la restrizione di f nell'intervallo $]2, +\infty[$. La funzione f_1 è strettamente crescente. Infatti per ogni fissato reale $x_1 \in]-\infty, 1[$ e per qualunque $x_2 \in]x_1, 1]$ (si osservi che $x_1 < x_2$) si ha:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) < f_1(x_2) &\iff x_1^3 + x_1 - 1 < x_2^3 + x_2 - 1 \iff x_2^3 - x_1^3 > x_1 - x_2 \\ &\iff (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) > -(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Dal momento che $x_2 - x_1 > 0$ dividendo ambo i membri dell'ultima disuguaglianza per $(x_2 - x_1)$ si ha:

$$f_1(x_1) < f_1(x_2) \iff x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 + 1 > 0.$$

Riguardando l'ultima espressione come disequazione di secondo grado in x_2 si vede che essa è soddisfatta per ogni valore di $x_2 \in]x_1, 1]$ in quanto il suo discriminante

$$\Delta_{x_1} = x_1^2 - 4x_1^2 - 4 = -3x_1^2 - 4$$

risulta essere negativo. Dall'essere x_1 arbitrario ne segue che per qualunque coppia $x_1 < x_2$ si ha $f_1(x_1) < f_1(x_2)$. Dopo di ciò, si può affermare che

$$f_1(0) = -1 \Rightarrow \forall x < 0 \text{ si ha } f_1(x) < 0;$$

inoltre $f_1(1) = 1$. D'altra parte, la funzione f_2 è strettamente crescente (in quanto il suo grafico è una semiretta parallela alla bisettrice del primo quadrante) e $\lim\limits_{x\to 2^+} f_2(x) = 1$.
In definitiva l'equazione $f(x) = 0$

- non ha soluzioni nell'insieme $]-\infty,0]\cup]2,+\infty[$;

- ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[0,1]$ (in virtù del teorema degli zeri e della stretta crescenza di f_1).

In alternativa è possibile utilizzare un metodo grafico. Infatti, si osservi che per determinare gli zeri di $f(x)$ nell'intervallo $]-\infty,1]$ bisogna risolvere l'equazione $x^3+x-1=0 \iff x^3 = 1-x$. Quindi, per applicare il metodo grafico è sufficiente ricordare che la funzione $g(x)=x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ con grafico passante per l'origine (che è anche punto di flesso) e per i punti $(-1,-1)$ e $(1,1)$; inoltre la funzione $h(x)=1-x$ è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$ ed il suo grafico è la retta passante per il punto $(0,1)$ e parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. Allora, con riferimento alla Figura 6, l'unica soluzione $\overline{x}$ si ottiene in corrispondenza dell'intersezione del grafico di g con il grafico di h ovvero $g(\overline{x})=h(\overline{x})$. Per determinare la

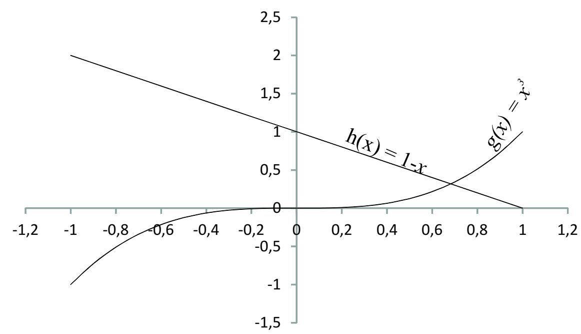

Figura 6: ad illustrazione del Problema 23.

richiesta approssimazione dello zero di $f(x)$ si può utilizzare il metodo di bisezione partendo dall'intervallo $[0,1]$. Risultando $f(0)=-1$ e $f(1)=1$ si considera il punto medio $\overline{x}=1/2$ dell'intervallo $[0,1]$ per il quale si ha:

$$f(\overline{x})=\overline{x}^3+\overline{x}-1=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{8}+\frac{4}{8}-\frac{8}{8}=-\frac{3}{8}=-0,375.$$

Assumendo $\overline{x}$ come soluzione dell'equazione $f(x)=0$ si commette l'errore $0,375$ che risulta essere maggiore di $0,05$ e questo richiede ulteriori applicazioni del metodo fino a raggiungere la precisione desiderata; esse sono riportate sinteticamente nella tabella seguente con l'errore arrotondato sulla terza cifra decimale.

intervallo	punto medio $(\overline{x})$	valore di f $f(\overline{x})$	errore $\lvert f(\overline{x})\rvert$
$[0,1]$	$1/2$	$-3/8$	$0,375$
$[\mathbf{1/2},1]$	$3/4$	$11/64$	$0,162$
$[1/2,\mathbf{3/4}]$	$5/8$	$-67/512$	$0,131$
$[\mathbf{5/8},3/4]$	$11/16$	$51/4096$	$\mathbf{0,012}$

Nell'ultima riga l'errore è minore di $0,05$ e pertanto lo zero di $f(x)$ con la precisione richiesta è $\overline{x}=11/16$.
Si osservi ora che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Da ciò, poiché la funzione f è strettamente crescente nel suo insieme di definizione e $f(1)=1=\lim_{x\to 2^+} f(x)$, ne consegue che il suo codominio è l'insieme $\mathbb{R}$. La funzione inversa f^{-1} esiste ed è definita in $\mathbb{R}$. D'altra parte f^{-1} non può essere continua dal momento che il suo codominio non consiste di un unico intervallo.

Problema 24. Sia ABC un triangolo isoscele, con $\overline{AC} = \overline{BC}$. Dimostrare che la somma delle distanze $d_{AC} + d_{BC}$ di un punto P di AB dai lati AC e BC è costante.

Soluzione 24. Si faccia riferimento alla Figura 7. Siano BH_b e AH_a le altezze del triangolo ABC relative, rispettivamente, ai lati AC e BC, di lunghezze $h_b = \overline{BH_b}$ e $h_a = \overline{AH_a}$. Risulta $h_a = h_b$ in quanto, indicata con S_{ABC} l'area del triangolo ABC, si ha:

$$h_a = \frac{2S_{ABC}}{\overline{BC}} = \frac{2S_{ABC}}{\overline{AC}} = h_b.$$

Se $P = A$ o $P = B$, si ha $d_{AC} + d_{BC} = 0 + h_a$ o $d_{AC} + d_{BC} = h_b + 0$ e quindi

$$d_{AC} + d_{BC} = h_a = h_b.$$

Sia ora il punto P interno al lato AB e sia P_a (risp., P_b) il punto di AC (risp., di BC) tale che

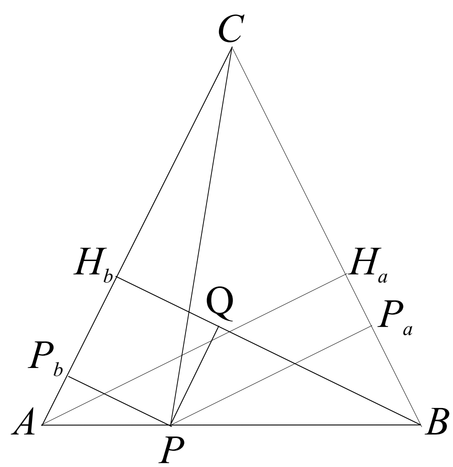

Figura 7: ad illustrazione del Problema 21.

$PP_b \perp AC$ (risp., $PP_a \perp BC$); sia poi $Q \in BH_b$ il punto tale che $PQ \perp BH_b$.
Indicata l'ampiezza di un angolo con la lettera m seguita dall'indicazione dell'angolo tra parentesi tonde, si ha:

$$m(P_a\widehat{P}B) = 90^\circ - m(P\widehat{B}P_a) = 90^\circ - m(P\widehat{A}P_b) = m(A\widehat{P}P_b) = m(P\widehat{B}Q).$$

Pertanto, i triangoli rettangoli PBQ e PBP_a avendo due angoli uguali e l'ipotenusa in comune sono congruenti, cosicché $\overline{PP_a} = \overline{BQ}$. Inoltre, dal fatto che PP_b e QH_b sono lati opposti del rettangolo PQH_bP_b, risulta $\overline{PP_b} = \overline{QH_b}$. In definitiva:

$$d_{AC} + d_{BC} = \overline{PP_b} + \overline{PP_a} = \overline{QH_b} + \overline{QB} = h_b.$$

In alternativa, indicata con S_{APC} l'area del triangolo APC e con S_{BPC} l'area del triangolo BPC si ha:

$$\frac{h_b \cdot \overline{AC}}{2} = S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} = \frac{d_{AC} \cdot \overline{AC}}{2} + \frac{d_{BC} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AC}}{2}\left(d_{AC} + d_{BC}\right).$$

Da quest'ultima si ricava nuovamente che $d_{AC} + d_{BC} = h_b$.
Una dimostrazione alternativa utilizzante considerazioni di tipo trigonometrico è la seguente. Con riferimento alla Figura 7 e indicato con α l'angolo alla base del triangolo isoscele, $\alpha = B\widehat{A}C \equiv A\widehat{B}C$, risulta:

$$\overline{PP_b} = \overline{AP} \sin\alpha \qquad \text{e} \qquad \overline{PP_a} = \overline{BP} \sin\alpha.$$

Dopo di ciò, tenendo conto che $\overline{BP} = \overline{AB} - \overline{AP}$, si ha:

$$\begin{aligned}\overline{PP_b} + \overline{PP_a} &= \overline{AP}\sin\alpha + \overline{BP}\sin\alpha \\ &= \overline{AP}\sin\alpha + (\overline{AB} - \overline{AP})\sin\alpha \\ &= \overline{AB}\sin\alpha\end{aligned}$$

La tesi segue dal fatto che l'ultimo membro dipende solo dalle caratteristiche del triangolo isoscele considerato (la lunghezza della base e l'ampiezza dell'angolo alla base) e non dal punto P scelto sulla base.
Un'ulteriore dimostrazione poggia su considerazioni di geometria analitica. Con riferimento alla Figura 7, si consideri il sistema di riferimento aventi per assi la retta x passante per i punti A e B e la retta y ortogonale a r e passante per C. In tale sistema di riferimento, l'origine O coincide con il punto di mezzo di AB e il punto P ha ordinata nulla. Inoltre, posto

$$d = \frac{\overline{AB}}{2} \qquad \text{e} \qquad c = \overline{OC},$$

risulta $A \equiv (-d, 0)$, $B \equiv (d, 0)$ e $C \equiv (0, c)$. Dopo di ciò, indicata con r_{BC} la retta passante per i punti B e C e con r_{AC} la retta passante per i punti A e C è agevole determinare le loro equazioni in forma implicita:

$$r_{BC}:\ cx + dy - cd = 0 \qquad \text{e} \qquad r_{AC}:\ cx - dy + cd = 0.$$

In definitiva, indicata con $d(Q, r)$ la distanza di un punto Q del piano da una retta r e con $x_P < d$ l'ascissa del punto P, si ha:

$$\begin{aligned}\overline{PP_b} + \overline{PP_a} = d(P, r_{AC}) + d(P, r_{BC}) &= \frac{|cx_P - cd|}{\sqrt{c^2+d^2}} + \frac{|cx_P + cd|}{\sqrt{c^2+d^2}} \\ &= \frac{cd - cx_P}{\sqrt{c^2+d^2}} + \frac{cx_P + cd}{\sqrt{c^2+d^2}} \\ &= 2d\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}.\end{aligned}$$

La tesi segue dal fatto che l'ultimo membro dipende solo dalle caratteristiche del triangolo isoscele considerato (l'ascissa del vertice B e l'ordinata del vertice C) e non dal punto P scelto sulla base.
Si osservi, per completezza, che

$$2d\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} = \overline{AB}\sin\alpha = h_b.$$