Certamen Nazionale di Matematica "R. Caccioppoli"

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"

Sezione napoletana della Mathesis "A. Morelli"

Liceo Scientifico Statale "G. Mercalli"

NAPOLI, 07 Aprile 2011

LSS "G. Mercalli"

(Tempo a disposizione: 4 ore)

NOTE: Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo.
Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici programmabili, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, **è vietato l'uso di telefoni cellulari**.
La prova consiste di 33 problemi divisi in 3 gruppi.
Nella **Sezione A: problemi a risposta multipla**, per i problemi dal numero 1 al numero 25 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, nella pagina con la griglia. Ogni risposta giusta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
Nella **Sezione B: problemi a singola risposta**, i problemi da 26 a 30 richiedono una sola risposta che va indicata nella pagina con la griglia nella relativa finestrella. Ogni risposta giusta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
Infine, nella **Sezione C: problemi con dimostrazione**, i problemi 31, 32 e 33 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di tali problemi verrà valutato con un punteggio da 0 a 10. Con questo fascicoletto, nella busta grande, vi è anche una busta piccola con un foglietto che compilerai con i tuoi dati personali e poi inserirai nella busta piccola. Al momento della consegna e in presenza di un docente chiuderai la busta piccola che insieme al fascicoletto verrà inserita nella busta grande.
AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai 4 ore di tempo.
Buon lavoro!

SEZIONE A: PROBLEMI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Quanto vale il prodotto $(\log_2 3)\,(\log_3 4)\,(\log_4 5)\,...\,(\log_{31} 32)$?

(A) 5.

(B) 1/2.

(C) 2.

(D) 3/2.

(E) 5/2.

2. Una ditta di catering adotta la seguente modalità di pagamento per ogni servizio di ristorazione fornito. Al momento della prenotazione il cliente è tenuto a corrispondere 1/10 del costo totale del servizio, i 2/3 del restante importo devono essere corrisposti prima della fornitura e il saldo alla fine del servizio. Quale frazione del costo totale si paga alla fine del servizio?

(A) 7/10.

(B) 9/10.

(C) 5/10.

(D) 3/10.

(E) 2/10.

3. Il costo di un week-end in una città d'arte è p per il pernottamento in albergo e $2p$ per il biglietto aereo. L'agenzia di viaggi propone uno sconto del 30% sul pernottamento e del 15% sul biglietto se la prenotazione del viaggio è effettuata on-line e il pagamento è fatto con carta di credito. Se si decide di acquistare il pacchetto in modalità on-line, quanto si risparmia in percentuale complessivamente?

(A) 15%.

(B) 20%.

(C) 25%.

(D) 30%.

(E) 35%.

4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \le a \\ x^2, & \text{se } x > a \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Per quali valori del parametro a la funzione è continua in $\mathbb{R}$?

(A) $a = \pm 1$.

(B) $a = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

(C) $a = \pm 1/2$.

(D) $a = \pm \sqrt{5}/2$.

(E) $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

5. Sapendo che $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, quanto vale $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x)$?

(A) $1/2$.

(B) $1/4$.

(C) $3/4$.

(D) 3.

(E) 1.

6. Il rapporto tra i volumi di due cubi è 6. Qual è il rapporto tra le loro superfici?

(A) 3.

(B) 6.

(C) $6^{2/3}$.

(D) $6^{1/3}$.

(E) $3^{3/2}$.

7. Quale delle seguenti proposizioni equivale a dire che: "condizione sufficiente affinché la proposizione $\mathcal{B}$ sia vera è che sia vera la proposizione $\mathcal{A}$"?

(A) Se $\mathcal{A}$ è vera, allora $\mathcal{B}$ è vera.

(B) Se $\mathcal{B}$ è vera, allora $\mathcal{A}$ è vera.

(C) Se $\mathcal{A}$ è falsa, allora $\mathcal{B}$ è falsa.

(D) $\mathcal{A}$ è falsa se, e solo se, $\mathcal{B}$ è falsa.

(E) $\mathcal{A}$ è vera se, e solo se, $\mathcal{B}$ è vera.

8. Qual è l'espressione della funzione inversa di $x \mapsto \dfrac{5x-3}{2x}$?

(A) $y \mapsto \dfrac{-5y+3}{-2y}$.

(B) $y \mapsto \dfrac{2y}{5y-3}$.

(C) $y \mapsto \dfrac{3}{5-2y}$.

(D) $y \mapsto \dfrac{3-5y}{2y}$.

(E) $y \mapsto \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{3}y$.

9. Per quanti numeri reali x nell'intervallo chiuso $[1, 2]$, x e x^2 hanno la stessa parte decimale ?

(A) Due.

(B) Quattro.

(C) Uno.

(D) Tre.

(E) Nessuno.

10. Siano x e y due numeri reali tali che $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$. Quale delle seguenti disuguaglianze è falsa?

(A) $y - \sin y < x - \sin x$.

(B) $\sin x < \sin y$.

(C) $x - \sin x < y - \sin y$.

(D) $\cos y < \cos x$.

(E) $1 - \cos^2 x < 1 - \cos^2 y$.

11. Aumentando la base del rettangolo del 20% e l'altezza del 50%, di quanto aumenta l'area?

(A) 70%.

(B) 72%.

(C) 75%.

(D) 78%.

(E) 80%.

12. Uno studente universitario, dopo aver superato 5 esami, ha la media del 27. Se lo studente supera l'esame successivo con 21, qual è la sua media dopo il sesto esame?

(A) 24.

(B) 24.5.

(C) 25.

(D) 25.5.

(E) 26.

13. Quanti sono i numeri di 3 cifre tali che ogni cifra sia maggiore della successiva partendo da quella delle centinaia?

(A) 336.

(B) 120.

(C) 100.

(D) 219.

(E) 169.

14. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

(A) $\sqrt{x^2} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(B) $\sqrt{x^2} = -x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(C) $\sqrt{x^2} = \mid x \mid \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(D) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(E) $\sqrt{(-x)^2} = -x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

15. Assegnata la proposizione *"C'è almeno un attrezzo della palestra che tutti gli allievi sono in grado di usare"*, quale delle seguenti è la sua negazione logica?

(A) C'è qualche attrezzo della palestra che nessun allievo è in grado di usare.

(B) Ogni attrezzo della palestra non è utilizzabile da qualche allievo.

(C) Nessun allievo è in grado di usare tutti gli attrezzi della palestra

(D) Ogni allievo non è in grado di usare almeno un attrezzo della palestra

(E) C'è qualche allievo che è in grado di usare tutti gli attrezzi della palestra

16. Le disequazioni

$$\ln \frac{2x+1}{x+2} > 0 \qquad \text{e} \qquad \ln(2x+1) - \ln(x+2) > 0$$

(A) Hanno lo stesso insieme di soluzioni.

(B) Hanno insiemi di soluzioni disgiunti.

(C) L'insieme delle soluzioni della seconda è contenuto nell'insieme delle soluzioni della prima.

(D) L'insieme delle soluzioni della prima è contenuto nell'insieme delle soluzioni della seconda.

(E) Gli insiemi delle soluzioni non sono disgiunti e non sono contenuti uno nell'altro.

17. Sia q un quadrato di diagonale d e sia Q un quadrato di diagonale $2d$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Il perimetro di Q è il quadruplo del perimetro di q.

(B) L'area di Q è il quadruplo dell'area di q.

(C) Il lato di Q è il quadruplo del lato di q.

(D) Il volume del cubo di base Q è il quadruplo del volume del cubo di base q.

(E) Nessuna delle precedenti è vera.

18. Sia M l'insieme dei numeri reali y per i quali esistono un numero reale $x > 0$ ed un intero positivo n tali che $y = x + \dfrac{1}{x^n}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) $\inf M = 0$, $\sup M = +\infty$.

(B) $\inf M = 2$, $\sup M = +\infty$.

(C) $\inf M = 1$, $\sup M = +\infty$.

(D) M non è limitato né inferiormente, né superiormente.

(E) $\inf M = 0$, $\sup M = 1$.

19. Dati due numeri reali a, b tali che $a < b$ e $ab > 0$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) $a^2 < b^2$.

(B) $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

(C) $a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0$.

(D) $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

(E) $a > 0 \quad \text{o} \quad b > 0$.

20. Per quale delle seguenti funzioni si ha $f(3x) = 3f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

(A) $f(x) = x^2$.

(B) $f(x) = 2^x$.

(C) $f(x) = \mid x \mid$.

(D) $f(x) = x - 2$.

(E) $f(x) = \sqrt{\mid x \mid}$.

21. Quanto vale $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$?

(A) 1.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 0.

(E) $\dfrac{1}{2}$.

22. In un insieme S con $2n + 1$ elementi è assegnata una relazione binaria R con le due seguenti proprietà:

(1) R è simmetrica (cioè, per ogni coppia x, y di elementi di S, se x è nella relazione R con y, allora y è nella relazione R con x);

(2) per ogni sottoinsieme A di S con n elementi, esiste almeno un elemento x di S, non appartenente ad A, che è nella relazione R con ogni elemento di A.

Quale delle seguenti affermazione è vera?

(A) Qualche elemento di S è nella relazione R con tutti gli altri elementi di S.

(B) Ogni elemento di S è nella relazione R con tutti gli altri elementi di S.

(C) Nessun elemento di S è in relazione con tutti gli altri elementi di S.

(D) Ogni elemento di S non è in relazione con tutti gli altri elementi di S.

(E) I dati sono insufficienti per rispondere correttamente.

23. Quanti interi positivi $n \leq 10000$ non sono divisibili né per 2, né per 3, né per 5?

(A) 666.

(B) 1666.

(C) 1667.

(D) 2666.

(E) 3666.

24. 101 è un numero primo che, in base 10, ha come cifre –alternativamente– solo 0 e 1. Fra tutti i numeri di questo tipo, $1010\ldots1$, con $k > 1$ cifre uguali ad 1 e $k - 1$ cifre uguali a 0, (1 e 0 alternati), quanti sono quelli primi?

(A) Uno.

(B) Due.

(C) Tre.

(D) Più di tre, ma in numero finito.

(E) Infiniti.

25. Siano

$$\begin{aligned}
f(x) &= 729x^8 + 891x^7 + 162x^6 + 135x^5 - 15x^4 - 69x^3 + 10x^2 - 5x + 2,\\
g(x) &= 729x^8 + 162x^7 + 135x^5 - 69x^4 + 10x^2 - 9x + 2,\\
h(x) &= [f(x)]^2,\\
k(x) &= [f(x)]^2 + 2g(x).
\end{aligned}$$

Quante sono le radici ***razionali*** comuni dei polinomi $h(x)$ e $k(x)$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

(E) Più di tre.

SEZIONE B: PROBLEMI A SINGOLA RISPOSTA

26. Determinare l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:

$$|x-3|+|x+2|<11.$$

27. Determinare a e b in modo che i punti $P \equiv \left(2, 10\sqrt{2}\right)$ e $Q \equiv \left(1/2, 5/2\sqrt{2}\right)$ appartengano alla curva di equazione $y = ax^b$.

28. Trovare una terna (x, y, z) di interi tale che

$$x \leq y \leq z, \quad (x, y, z) \neq (1, 1, 1)\,, \quad x+y+z = x^3+y^3+z^3 = 3.$$

29. $p \neq 73$ è un numero primo con la proprietà di dividere ogni numero naturale della forma (in base dieci) $abcdabcd$. Trovare p.

30. Nel sistema di assi cartesiani ortonormali Oxy sono dati i punti $A \equiv (2, 0)$, $B \equiv (0, 2)$. Siano H e K rispettivamente i punti di intersezione delle perpendicolari condotte da A e B alla retta $y = mx$. Quanto vale $|AH|^2 + |BK|^2$ al variare di m?

SEZIONE C: PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

31. Internamente al quadrato $ABCD$ si costruisca il triangolo isoscele ABE, di base AB e con angoli alla base $E\widehat{A}B$, $E\widehat{B}A$ di $15°$ gradi. Dimostrare che il triangolo ECD è equilatero.

32. Dimostare che se a e b sono numeri reali positivi con $a < b$, allora

$$\min_{a\leq p\leq b}\ \max_{a\leq x\leq b} |p-x| = \frac{b-a}{2}.$$

33. Data la successione

$$x_{n+1} = x_n + \cos x_n \qquad x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Dimostrare che

(a) $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) la successione è crescente.

Infine, calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.