Certamen Nazionale di Matematica "Renato Caccioppoli"

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Sezione napoletana della Mathesis "Aldo Morelli"

Liceo Scientifico Statale "Giuseppe Mercalli"

NAPOLI, 03 Aprile 2012
LSS "Giuseppe Mercalli"

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l'uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di **25** problemi divisi in **3** gruppi.
  Nella **"Sezione A: problemi a risposta multipla"**, per i quindici problemi dal numero 1 al numero 15 sono proposte **5** risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E. Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, nella pagina con la griglia. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto.** Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Nella **"Sezione B: problemi a singola risposta"**, i sette problemi dal numero 16 al numero 22 richiedono una sola risposta che va indicata nella pagina con la griglia nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 6 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto.** Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, nella **"Sezione C: problemi con dimostrazione"**, i tre problemi 23, 24 e 25 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di tali problemi verrà valutato con un punteggio **da 0 a 11.**
- Insieme a questo fascicoletto, nella busta grande, vi è anche una busta piccola con un foglietto che compilerai con i tuoi dati personali e poi inserirai nella busta piccola. Al momento della consegna e in presenza di un docente chiuderai la busta piccola che insieme al fascicoletto verrà inserita nella busta grande.

AVVERTENZA IMPORTANTE: **Non lasciare segni identificativi su questi fogli.**

Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **4 ore** di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A: PROBLEMI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Maria da sola dipinge una stanza in 2 ore, mentre Rita da sola completa lo stesso lavoro in 3 ore. Rita e Maria insieme iniziano a dipingere una stanza e lavorano 40 minuti, quando vengono raggiunte da Tina. Lavorando in tre per altri 20 minuti completano il lavoro. Quanto tempo impiega Tina a dipingere da sola una stanza?

   (A) 90 minuti

   (B) 120 minuti

   (C) 150 minuti

   (D) 180 minuti

   (E) 240 minuti

2. Siano r ed s due semirette uscenti da un punto V, che formano un angolo di 60° e sia c una circonferenza, tangente ad entrambe le semirette, di raggio 2.
   Qual è la distanza di V dal centro della circonferenza?

   (A) 1

   (B) $\frac{3}{2}$

   (C) $\sqrt{3}$

   (D) 3

   (E) 4

3. Qual è il numero delle soluzioni intere (x, y) dell'equazione

$$303x + 57y = a^2 + 1,$$

   dove a è un intero fissato?

   (A) 0

   (B) 1

   (C) 2

   (D) 3

   (E) > 3

4. In un cassetto vi sono monete in euro una per ciascuno degli otto tagli (da 1, 2, 5, 10, 20 e 50 centesimi e 1, 2 euro). In quanti modi distinti si può realizzare un totale superiore a 1 euro e 5 centesimi, prelevando a caso tre monete?

(A) 30

(B) 34

(C) 35

(D) 42

(E) 71

5. Sia a un numero positivo, con $a \neq 1$. Indicare quanto vale l'espressione

$$\sqrt[10]{5^{log_a \sqrt[3]{a^{15}}}}.$$

(A) $\sqrt{5}$

(B) 5^2

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\sqrt[10]{log_a 5}$

(E) $\sqrt[10]{5^{log_a 5}}$

6. Se da un vertice V di un esagono regolare si conducono le tre diagonali, l'esagono rimane diviso in quattro triangoli tali che:

(A) sono tutti isosceli

(B) sono tutti equivalenti

(C) due sono rettangoli

(D) nessuno è isoscele

(E) nessuno è rettangolo

7. Per quali valori di x è definita la funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$.

(A) $[-1, 2]$

(B) $\left[-1, \frac{3}{4}\right]$

(C) $[0, 1]$

(D) $[-1, 1]$

(E) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

8. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{f_3(x)} - \frac{1}{f_4(x)},$$

dove

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad f_2(x) = x^3 - x^2 - x + 1,$$
$$f_3(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1, \quad f_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1,$$

quale delle seguenti uguaglianze è vera?

(A) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^2 + x - 1}$

(B) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 1}$

(C) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^2 + x - 1}$

(D) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 + 2x^5 - x^4 + x^2 - 2x - 1}$

(E) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1}$

9. Sia S un sottoinsieme di numeri reali e sia m un numero reale. Assegnata la proposizione

"*Ogni elemento di S è minore o uguale ad m*",

dire qual è la sua negazione.

(A) ogni elemento di S è maggiore di m

(B) m è il più grande di tutti gli elementi di S

(C) almeno un elemento di S è maggiore di m

(D) non ci sono elementi di S più grandi di m

(E) non ci sono elementi di S più piccoli di m

10. La squadra di calcio di una scuola gioca in un torneo otto partite. In quanti modi la squadra può ottenere cinque vittorie, due sconfitte e un pareggio?

(A) 28

(B) 56

(C) 168

(D) 336

(E) 40320

11. Studiare il comportamento all'infinito della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4 - 3x_n + x_n^2, \\ x_0 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

(A) non ammette limite

(B) il limite è 0

(C) il limite è 1

(D) il limite è 2

(E) il limite è $+\infty$

12. Un circolo tennis ha 640 membri e tutti votano per eleggere il presidente. La graduatoria è la seguente: Marco, Elisa, Valeria, Antonio. Sapendo che Marco ha avuto 19 voti in più di Elisa, Elisa ha avuto 38 voti in più di Valeria e Valeria ha avuto 15 voti in più di Antonio, quanti voti ha avuto Marco?

(A) 185

(B) 197

(C) 204

(D) 213

(E) 221

13. Quanto vale
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1)\sin x?$$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) $+\infty$

(E) non esiste

14. Dieci studenti fuorisede stanno per partire insieme dalla città in cui si trova la loro università verso la loro città di residenza. Hanno a disposizione due automobili, ciascuna delle quali può portare al più sei persone. In quanti modi diversi gli studenti si possono sistemare sulle due automobili?

(A) 462

(B) 672

(C) 924

(D) 1344

(E) 2520

15. Sia p un numero primo. Dire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

(A) se $8p-1$ è composto, allora $8p+1$ è primo;

(B) se $8p-1$ è composto, allora $8p+1$ è composto;

(C) se $8p-1$ è primo, allora $8p+1$ è primo;

(D) se $8p-1$ è primo, allora $8p+1$ è composto;

(E) le quattro affermazioni precedenti sono tutte false.

Sezione B: PROBLEMI A SINGOLA RISPOSTA

16. Dato un trapezio isoscele di lato obliquo 10 cm, circoscritto ad un semicerchio di raggio 6 cm, determinare il perimetro P del trapezio.

17. Scegliendo a caso due vertici di un decagono, quanto vale la probabilità che questi due vertici siano gli estremi di una diagonale del decagono?

18. Consideriamo la seguente lista di parole: FRA, REO, STA, TRE, ALI.

A tre studiosi di logica viene detta una sola lettera di una di queste parole e ad ognuno viene detta una lettera diversa da quella degli altri. Ai tre studiosi viene poi data l'informazione che con le lettere loro indicate si può costruire una sola delle parole della lista. Quando ad ognuno di loro viene chiesto se sia in grado di dire qual è la parola indicata, uno risponde immediatamente di sì, dopo qualche attimo anche un altro risponde di sì ed infine anche il terzo risponde di sì.

Qual è la parola?

19. Esprimere l'ipotenusa i di un triangolo rettangolo di area 25 in funzione del suo perimetro P.

20. Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$\log\left(4 - 4|x+1| - x^2\right).$$

21. Nell'insieme dei numeri reali non negativi si consideri la funzione:

$$f_0(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Si definisca la seguente legge di composizione tramite la posizione

$$f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x)) \quad \text{per} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Determinare esplicitamente la forma del termine generale $f_n(x)$.

22. Fissato nel piano euclideo un riferimento ortonormale Oxy, si considerino i punti $A \equiv (1,1)$ e $B \equiv (2,2)$. Sia poi X un punto della retta r di equazione $y = x + 3$. Determinare come varia l'area del triangolo ABX al variare del punto X sulla retta r.

Sezione C: PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

23. Sia $ABCD$ un trapezio e sia M il punto medio del lato obliquo AD. Dimostrare che il trapezio è equivalente al doppio del triangolo MBC.

24. Assegnata una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo T, dimostrare che:

(1) f è limitata;

(2) se esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, allora necessariamente $f(x)$ è costante.

25. Dimostrare che esistono infiniti numeri naturali *non nulli* n tali che, simultaneamente, $\frac{n}{2}$ sia il quadrato di qualche numero naturale, $\frac{n}{3}$ il cubo di qualche numero naturale e $\frac{n}{5}$ la quinta potenza di qualche numero naturale. Detto m il più piccolo di tali numeri, determinare l'intero k tale che $10^k \leq m \leq 10^{k+1}$.