Liceo scientifico " G. Mercalli" Napoli Anno scolastico 2011- 2012

Selezione interna per l'accesso alla prova del 3 aprile 2012 del Certamen Nazionale " R . Caccioppoli"

Candidato ____classe V sez ________

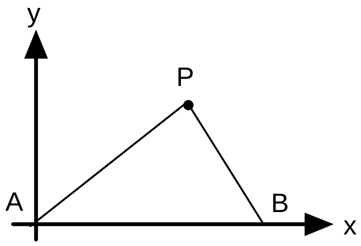
Durata massima della prova: due ore.

Punteggio ottenuto__________/30

1__ Determina l'equazione cartesiana del luogo dei punti del piano formato dai punti tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissati è costante. (Si consiglia di porre uno dei punti nell'origine delle coordinate). Discuti il risultato trovato. Punti da 1 a 4	Punti
2__ Quattro amici , fra cui il padrone di casa, giocano a dadi con le seguenti regole: ad ogni turno di gioco, ognuno di essi lancia un dado, e il padrone di casa paga cinque gettoni a chi ha ottenuto il suo stesso punteggio, mentre ne incassa uno da chi ha ottenuto un punteggio diverso. A un certo momento, uno dei tre ospiti salta un turno di gioco per prendere le sigarette dal suo soprabito. Alla fine del gioco essi rimangono con 23, 30, 32, 35 gettoni rispettivamente. Sapendo che all'inizio ognuno aveva 30 gettoni, sapreste indicare quanti gettoni hanno alla fine il padrone di casa e il fumatore? Punti 8	
3__ Sui quattro lati di un parallelogramma, ed esternamente a esso costruiamo quattro quadrati. Mostrare che i centri di questi quadrati sono a loro volta vertici di un quadrato. Punti da 1 a 5	
4__ Risolvere la seguente disequazione $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\sqrt{2}} > 1$. Punti 2	
5__ Studiare il seguente fascio di curve: $y = \frac{(k+2)x + k - 1}{2kx + 1}$ Punti 3	
6__ " Risolvendo un'equazione di grado superiore al primo,capita, talvolta, che l'equazione venga trasformata in un'altra equivalente di grado inferiore; si trovano allora meno soluzioni di quante ce ne potevamo aspettare a priori. In questi casi, si suole dire che <<ad ogni abbassamento di grado corrisponde una soluzione all' infinito>>". Valuta questa affermazione considerando, ad esempio, un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ in cui *b* sia positivo e cerca, se esistono, i limiti a cui tendono le sue due radici quando il coefficiente *a* del termine di grado massimo tende a zero (cioè quando l'equazione tende a diventare di primo grado) naturalmente supponendo *b* e *c* costanti. In seguito, visualizza quanto ottenuto, utilizzando la geometria analitica. Punti 4	
7__ Sono date le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 4$ ed $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ tangenti nel punto C. Detta t la tangente comune passante per C ed A e B i due punti di t aventi ordinate uguali alle lunghezze dei due raggi, condurre per A e per B le tangenti alle due circonferenze e verificare che esse limitano un parallelogramma. Determinare, infine, l'ampiezza dell'angolo acuto φ formato da due lati di questo. Esprimere il risultato in gradi, primi e secondi. Punti 4	
Totale	

Soluzioni prova di selezione interna del 14 febbraio 2012

1__ Il luogo cercato è la circonferenza di Apollonio.



Costruiamo la sua equazione cartesiana:
fissati due punti A e B, in modo che A coincida con l'origine delle coordinate e B sia posto a una distanza d da esso. Un punto del luogo cercato deve soddisfare questa condizione: $\frac{AP}{BP}=k$ con k costante reale positiva.
Determiniamo le coordinate cartesiane dei punti indicati: $P(x;y)$ $A(0;0)$ $B(d;0)$.
Applicando la definizione e normalizzando i coefficienti delle incognite di secondo grado, si ottiene: $x^2+y^2-\frac{2k^2d}{k^2-1}x+\frac{k^2d^2}{k^2-1}=0$, che rappresenta una circonferenza con centro: $C\left(\frac{k^2}{k^2-1}d;0\right)$ e raggio $r=\frac{kd}{k^2-1}$.

Quando k=1 la circonferenza degenera nella retta $x=\frac{d}{2}$ asse del segmento AB.

Quando k>1 contiene il punto B.
Quando 0<k<1 contiene il punto A.
Il raggio è proprio AB in questo caso: $r=\frac{kd}{k^2-1}$ e $r=d$ si ha: $d=\frac{kd}{k^2-1}$ da cui $k^2-1=k$ cioè $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ che costituisce il famoso rapporto aureo. (Vedere sin18°)

2__ Prendiamo in considerazione ciò che potrebbe succedere a uno dei giocatori, in due turni di gioco, schematizzato come segue:

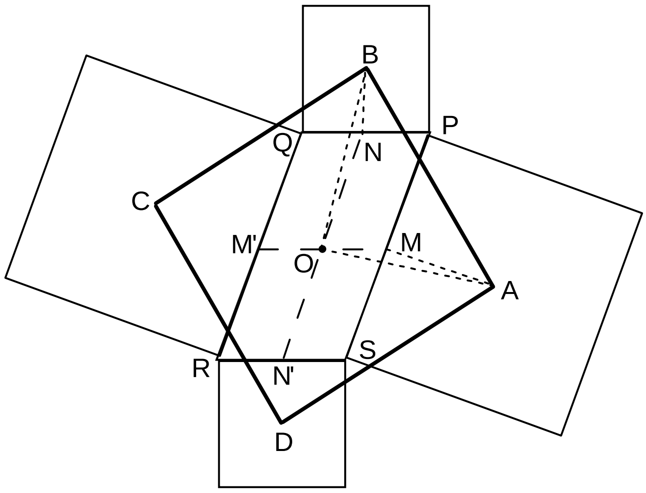
<table>
<tr><td rowspan="4">30 gettoni</td><td rowspan="2">35 gettoni</td><td>34 gettoni</td></tr>
<tr><td>40 gettoni</td></tr>
<tr><td rowspan="2">29 gettoni</td><td>28 gettoni</td></tr>
<tr><td>34 gettoni</td></tr>
</table>

Questi valori hanno una caratteristica comune calcolando i resti della divisione per 6 diminuiscono sempre di 1, come evidenziato in seguito:

<table>
<tr><td rowspan="4">Resto della divisione: 6
(per convenzione il resto è 6 per i multipli di 6 stesso)</td><td rowspan="2">Resto della divisione: 5</td><td>Resto della divisione: 4</td></tr>
<tr><td>Resto della divisione: 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Resto della divisione: 5</td><td>Resto della divisione: 4</td></tr>
<tr><td>Resto della divisione: 4</td></tr>
</table>

Indicando:
Padrone di casa: P
Giocatore: G1
Giocatore: G2
Fumatore: F
G1 e G2 rimangono con un numero di monete che diviso per 6 darà lo stesso resto
F avrà un resto maggiore
Quindi F=30 e P=32.

3__



Sia O il centro del parallelogramma dato PQRS e siano MOM' , NON' le sue mediane.
Il quadrilatero ABCD, ha per vertici i centri dei quadrati, è simmetrico rispetto a O e quindi è un parallelogramma di centro O .

Si ha ON =MA , NB =OM e $\widehat{ONB} = \widehat{OMA}$ perché somme di angoli uguali. Sono quindi uguali i triangoli OMA e ONB; in particolare OB =OA : il parallelogramma ABCD ha le diagonali uguali e quindi è un rettangolo.
Si ha infine:

$\widehat{AOB} = \widehat{AOM} + \widehat{MON} + \widehat{NOB}$.

Ma $\widehat{AOM} = \widehat{NOB}$, $\widehat{NOB} = \widehat{MAO}$ e $\widehat{MON}$ è uguale all'angolo in P del parallelogramma dato.

Quindi nel triangolo AOM , $\widehat{AOM} = 180° - \left(\widehat{AMS} + \widehat{SMO}\right) - \widehat{OAM} = 90° - \widehat{MPN} - \widehat{NOB}$ e di conseguenza $\widehat{AOB} = \widehat{AOM} + \widehat{MON} + \widehat{NOB} = 90°$: le diagonali del rettangolo ABCD sono perpendicolari e dunque ABCD è un quadrato.

4__

Una disequazione a esponente reale esiste quando la sua base è maggiore o uguale a zero (essendo l'esponente maggiore di zero), per cui il C. d. e. della disequazione è: $\left]-\infty;-2\right[\cup\left[1;+\infty\right[$, scriviamo la disequazione in questo modo $\left(1-\frac{3}{x+2}\right)^{\sqrt{2}}>1$, per cui per $x\geq 1$ $1-\frac{3}{x+2}<1$, mentre per $x<-2$ $1-\frac{3}{x+2}>1$. La soluzione è : **x< -2.**

5__

$$y = \frac{(k+2)x + k - 1}{2kx + 1}$$

Se k=0   y=2x-1   si ha una retta

Se $k \neq 0$ e $\begin{vmatrix} k+2 & k-1 \\ 2k & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ è una funzione omografica.

Se $k = 2$ o $k = -\frac{1}{2}$ si hanno rette parallele all'asse x.

6__

Calcoliamo i limiti per *a* che tende a zero delle soluzioni dell'equazione di secondo grado:

$\lim_{a\to 0}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ questo è un limite che vale $+\infty$ se a tende a zero da sinistra, mentre vale $-\infty$ se a tende a zero da destra.

Calcoliamo l'altro limite: $\lim_{a\to 0}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ è una forma indeterminata 0:0 che calcoliamo in questo modo:

$$\lim_{a\to 0}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}=\lim_{a\to 0}\frac{b^2-b^2+4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac}}=\lim_{a\to 0}\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}=-\frac{c}{b}$$

Quindi si conclude che per *a* che tende a zero una delle radici dell'equazione di secondo grado tende alla soluzione dell'equazione $bx+c=0$ che si ottiene ponendo *a* uguale a zero, mentre l'altra tende a infinito.

La situazione può essere visualizzata anche analiticamente risolvendo il sistema $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$

Facendo variare a nell'insieme dei valori per cui $\Delta\geq 0$ e attribuendo ai coefficienti a,b,c, dei valori arbitrari $b\neq 0$, si ottengono delle parabole che intersecano l'asse delle x in due punti x_1 e x_2.

Al tendere di a a zero uno di essi tende a -c/b mentre l'altro tende a $-\infty$ o $+\infty$.

Provate a disegnare queste parabole.

7__ Il punto C è $C(0;2)$, i coefficienti angolari delle rette tangenti sono $m=0$ e $m=-\frac{3}{4}$.

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo acuto richiesto utilizziamo: $tg\varphi=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ da cui si ottiene:

$\varphi=arctg\frac{3}{4}$.