LICEO SCIENTIFICO “GIUSEPPE MERCALLI” – NAPOLI

PROVA DI SELEZIONE INTERNA

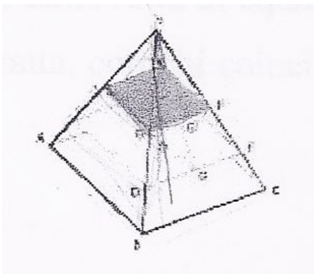
PER IL III CERTAMEN NAZIONALE

DI MATEMATICA

“RENATO CACCIOPPOLI”

2013

1. A quale distanza dal vertice si debbono condurre due piani paralleli alla base di una piramide di altezza h affinché essa resti divisa in tre parti equivalenti?



SOLUZIONE

Infatti sia $h_1 = \overline{VO'}$ e $h_2 = \overline{VO}$, $V$ il volume della piramide,
$V_1$ il volume della piramide di altezza $h_1$,
$V_2$ il volume del tronco di piramide di altezza $h_2 - h_1$ e
$V_3$ quello di altezza $h - h_2$,
per il teorema sulle sezioni parallele di una piramide si ha:

$$V_1 = \frac{h_1^3}{h^3}V, \quad V_2 = \frac{h_2^3}{h^3}V - \frac{h_1^3}{h^3}V \quad \text{e} \quad V_3 = V - \frac{h_2^3}{h^3}V.$$

Inoltre dovendo essere $V_1 = V_2 = V_3$ ne segue che $h_1 = \dfrac{h}{\sqrt[3]{3}}$, $h_2 = \dfrac{h\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

LICEO SCIENTIFICO "GIUSEPPE MERCALLI" – NAPOLI

PROVA DI SELEZIONE INTERNA

PER IL III CERTAMEN NAZIONALE

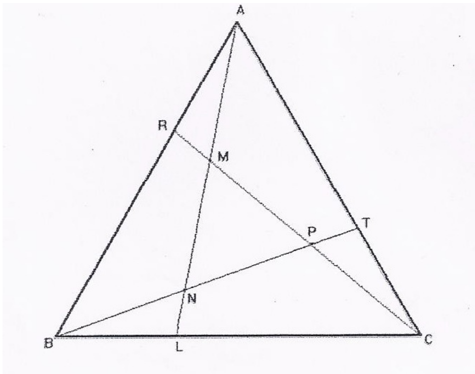
DI MATEMATICA

"RENATO CACCIOPPOLI"

2013

2. Un triangolo equilatero di vertici ABC vine diviso in sette parti dai segmenti AL, BT e CR, tutti e tre di uguale lunghezza. Il triangolo AMR (e gli altri due ad esso congruenti) ha area uguale a 8 $m^2$, mentre il quadrilatero BNMR (e gli altri due ad esso congruenti) ha area uguale a 22 $m^2$. Calcolare l'area del triangolo MNP.

SOLUZIONE




Posto l il lato del triangolo equilatero e x = AR, si ha $CR^2=AL^2=BT^2=l^2-xl+x^2$. Detto $\alpha$ l'angolo $RCA=CBT=LAB$ e applicando il teorema dei seni al triangolo ABL si ha $sen\alpha=\frac{xsen60°}{AL}$.

Applicando il teorema dei seni al triangolo BNA si ha $NB=\frac{l}{sen120°}sen\alpha=\frac{lx}{AL}$ e applicando sempre il teorema dei seni al triangolo BNL si ha $NL=\frac{x}{sen60°}sen\alpha=\frac{x^2}{AL}$. Poiché i triangoli ABL e AMR sono simili le loro aree stanno tra loro come i quadrati di due lati si ha $\frac{AL^2}{x^2}=\frac{38}{8}$ quindi $\frac{l^2-lx+x^2}{x^2}=\frac{38}{8}$. Posto $r=\frac{l}{x}$ otteniamo l'equazione $r^2-r+1=\frac{38}{8}$ la cui unica soluzione accettabile è $r=\frac{5}{2}$. Il triangolo MNP è equilatero (quindi è simile ad ABC), detta A la sua area, quella del triangolo ABC è A+90, inoltre $\frac{A+90}{A}=\frac{l^2}{MN^2}$. Poiché MN =AL-AM-NL sostituendo e tenuto conto che AM = NB si ha $\frac{A+90}{A}=\frac{l^2}{MN^2}=\frac{l^2-lx+x^2}{(l-2x)^2}=\frac{r^2-r+1}{(r-2)^2}=19$.

Dunque $1+\frac{90}{A}=19$ quindi A=5 $m^2$

LICEO SCIENTIFICO “GIUSEPPE MERCALLI” – NAPOLI

PROVA DI SELEZIONE INTERNA

PER IL III CERTAMEN NAZIONALE

DI MATEMATICA

“RENATO CACCIOPPOLI”

2013

3. Determina il luogo geometrico dei punti del piano per i quali il rapporto k delle distanze dal punto $Q(\sqrt{2}; 0)$ e dalla retta di equazione $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$ è $k = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Indica di quale luogo geometrico si tratta, con chi coincide il punto Q e a chi corrisponde il rapporto k.

4. Quanto può valere la somma dei quadrati di due numeri realli il cui prodotto vale $k^2$ ?

5. Rappresentare la funzione f(x)=sen(arccosx).

6. Un punto C di una circonferenza di centro O e raggio unitario è il vertice di un angolo alla circonferenza di ampiezza $\alpha$, i cui lati intersecano la circonferenza nei punti A e B. Detto D il punto in cui la bisettrice di tale angolo incontra la circonferenza. Calcolare l’area del quadrilatero AOBD.

7. Data una semicirconferenza di diametro AC=2r e centro O, tracciare la semiretta uscente da A, perpendicolare ad AC e giacente rispetto ad AC dalla stessa parte della semicirconferenza. Detto M un punto generico di tale semiretta, indicare con x la distanza di M da A. Da M mandare l’ulteriore tangente in B alla semicirconferenza. Detta K l’intersezione della semicirconferenza con il segmento OM, determinare larea y del quadrilatero ACBK in funcione di x. Determinare il valore di y per x□+∞.

8. Dimostrare analiticamente o graficamente che l’equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

Ammette una ed una sola soluzione reale ed indicare un intervallo [k,k+1] con $k \in Z$, nel quale sia contenuta tale soluzione.