Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”

Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”

Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 03 Aprile 2012

LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto finché l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri concorrenti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di **25** problemi divisi in **3** gruppi.

  Nella **“Sezione A: problemi a risposta multipla”**, per i quindici problemi dal numero 1 al numero 15 sono proposte **5** risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, nella pagina con la griglia. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.

  Nella **“Sezione B: problemi a singola risposta”**, i sette problemi dal numero 16 al numero 22 richiedono una sola risposta che va indicata nella pagina con la griglia nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 6 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.

  Infine, nella **“Sezione C: problemi con dimostrazione”**, i tre problemi 23, 24 e 25 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di tali problemi verrà valutato con un punteggio **da 0 a 11**.
- Insieme a questo fascicoletto, nella busta grande, vi è anche una busta piccola con un foglietto che compilerai con i tuoi dati personali e poi inserirai nella busta piccola. Al momento della consegna e in presenza di un docente chiuderai la busta piccola che insieme al fascicoletto verrà inserita nella busta grande.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.

Quando l’insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **4 ore** di tempo. Buon lavoro!

Risposte ai primi 22 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	E	A	C	A	C	A	E	C	C

11	12	13	14	15
D	B	A	B	D

16	17	18	19
44 cm	$\frac{7}{9}$	REO	$i = \frac{P^2 - 100}{2P}$

20	21	22
$]2-2\sqrt{3}, 0[$	$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}$	Rimane invariata

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–15)		$\times 5 =$	
numero degli esercizi senza risposta (1–15)		$\times 1 =$	
numero delle risposte esatte (16–22)		$\times 6 =$	
numero degli esercizi senza risposta (16–22)		$\times 1 =$	
valutazione esercizio nr. 23			
valutazione esercizio nr. 24			
valutazione esercizio nr. 25			
		Punteggio totale	

SEZIONE A: PROBLEMI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Maria da sola dipinge una stanza in 2 ore, mentre Rita da sola completa lo stesso lavoro in 3 ore. Rita e Maria insieme iniziano a dipingere una stanza e lavorano 40 minuti, quando vengono raggiunte da Tina. Lavorando in tre per altri 20 minuti completano il lavoro. Quanto tempo impiega Tina a dipingere da sola una stanza?

(A) 90 minuti

(B) 120 minuti

(C) 150 minuti

(D) 180 minuti

(E) 240 minuti

Soluzione: La risposta esatta è (B).

Maria in 1 ora dipinge $\frac{1}{2}$ di una stanza e Rita $\frac{1}{3}$. Quindi insieme dipingono $\frac{5}{6}$ del lavoro. Tina in 20 minuti esegue il rimanente $\frac{1}{6}$. Quindi Tina dipingerebbe una stanza $(= 6 \cdot \frac{1}{6})$ in $6 \cdot 20$ minuti $= 120$ minuti.

Diamo anche in alternativa la seguente soluzione. In un minuto Maria da sola completa $\frac{1}{120}$, Rita completa $\frac{1}{180}$ e Tina $\frac{1}{t}$ del lavoro. Maria e Rita lavorano insieme per 40 minuti, quindi completano

$$\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{180}\right)40 = \frac{5}{360}40 = \frac{5}{9}$$

del lavoro. Maria, Rita e Tina lavorando insieme per 20 minuti completano i restanti $\frac{4}{9}$ del lavoro:

$$\left(\frac{5}{360} + \frac{1}{t}\right)20 = \frac{5}{18} + \frac{20}{t} = \frac{4}{9},$$

da cui

$$\frac{20}{t} = \frac{4}{9} - \frac{5}{18} = \frac{1}{6},$$

e $t = 120$ minuti.

2. Siano r ed s due semirette uscenti da un punto V, che formano un angolo di $60°$ e sia c una circonferenza, tangente ad entrambe le semirette, di raggio 2.
Qual è la distanza di V dal centro della circonferenza?

(A) 1

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) 3

(E) 4

Soluzione: La risposta esatta è (E).

Sia O il centro di c e sia H il punto di intersezione di r con la perpendicolare per O ad r. Poiché O è equidistante da r ed s, si trova sulla bisettrice dell'angolo in V. Dunque VO è l'ipotenusa del triangolo rettangolo VHO in cui il cateto OH è opposto ad un angolo di 30°. In definitiva VO è il doppio di tale cateto, ossia $|VO| = 4$.

3. Qual è il numero delle soluzioni intere (x, y) dell'equazione

$$303x + 57y = a^2 + 1,$$

dove a è un intero fissato?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) > 3

Soluzione: La risposta esatta è (A).

Infatti $3 = mcd(303, 57)$ non può dividere $a^2 + 1$, qualunque sia $a \in \mathbb{Z}$.

Precisamente, affinché ci siano soluzioni intere dell'equazione assegnata, $a^2 + 1$ deve essere multiplo di 3 e quindi a non può essere multiplo di 3. Allora a deve essere della forma: $a = 3k + 1$ oppure $a = 3k + 2$ con $k \in \mathbb{Z}$ qualsiasi. Nel primo caso $a^2 + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 2$ e nel secondo caso $a^2 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2$ e quindi $a^2 + 1$ non può mai essere multiplo di 3.

4. In un cassetto vi sono monete in euro una per ciascuno degli otto tagli (da 1, 2, 5, 10, 20 e 50 centesimi e 1, 2 euro). In quanti modi distinti si può realizzare un totale superiore a 1 euro e 5 centesimi, prelevando a caso tre monete?

(A) 30

(B) 34

(C) 35

(D) 42

(E) 71

Soluzione: La risposta esatta è (C).

Esaminando il taglio delle monete si deduce che combinazioni di tre monete che consentono di superare la somma di 1 euro e 5 centesimi sono certamente tutte quelle che includono la moneta da 2 euro. Il numero di tali combinazioni è

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

A queste va poi aggiunto il numero di combinazioni che comprendono la moneta da 1 euro abbinata a due monete scelte nell'insieme $\{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$, avendo cura di eliminare tra queste quell'unica scelta che abbina le monete da 1 e da 2 centesimi. In definitiva, il numero di modi con cui si realizza un valore superiore a 1 euro e 5 centesimi è

$$21 + \binom{6}{2} - 1 = 20 + \frac{6 \cdot 5}{2} = 35,$$

che corrisponde alla scelta (C).

5. Sia a un numero positivo, con $a \neq 1$. Indicare quanto vale l'espressione

$$\sqrt[10]{5^{log_a \sqrt[3]{a^{15}}}}.$$

(A) $\sqrt{5}$

(B) 5^2

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\sqrt[10]{log_a 5}$

(E) $\sqrt[10]{5^{log_a 5}}$

Soluzione: La risposta esatta è (A).

Infatti:

$$\sqrt[10]{5^{log_a \sqrt[3]{a^{15}}}} = \sqrt[10]{5^{log_a a^5}} = \sqrt[10]{5^5} = \sqrt{5}.$$

6. Se da un vertice V di un esagono regolare si conducono le tre diagonali, l'esagono rimane diviso in quattro triangoli tali che:

(A) sono tutti isosceli

(B) sono tutti equivalenti

(C) due sono rettangoli

(D) nessuno è isoscele

(E) nessuno è rettangolo

Soluzione: La risposta esatta è (C).

Infatti i due triangoli più esterni sono entrambi isosceli con gli angoli alla base di $30°$. Di conseguenza i due triangoli più interni hanno entrambi un angolo di $120° - 30° = 90°$ e quindi sono rettangoli.

7. Per quali valori di x è definita la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}.$$

(A) $[-1, 2]$

(B) $\left[-1, \frac{3}{4}\right]$

(C) $[0, 1]$

(D) $[-1, 1]$

(E) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

Soluzione: La risposta esatta è (A).

Il dominio della funzione è individuato dal seguente sistema:

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0 \end{cases}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

da cui la (A).

8. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{f_3(x)} - \frac{1}{f_4(x)},$$

dove

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad f_2(x) = x^3 - x^2 - x + 1,$$
$$f_3(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1, \quad f_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1,$$

quale delle seguenti uguaglianze è vera?

(A) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^2 + x - 1}$

(B) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 1}$

(C) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^2 + x - 1}$

(D) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 + 2x^5 - x^4 + x^2 - 2x - 1}$

(E) $f(x) = \dfrac{2}{x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1}$

Soluzione: La risposta esatta è (E).

Si ha infatti

$$f_1(x) = (x-1)^3, \quad f_2(x) = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)^2(x+1),$$

Inoltre $f_3(1) = 0 = f_4(1)$, quindi $f_3(x)$ e $f_4(x)$ sono multipli di $(x-1)$ e tali sono (come si vede eseguendo le divisioni) anche i rispettivi quozienti. Si ha:

$$f_3(x) = (x-1)^2(x^2-1) = (x-1)^3(x+1), \quad f_4(x) = (x-1)^2(x^2+1),$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+1)(x^2+1) - (x-1)(x^2+1) - (x^2+1) - (x-1)(x+1)}{(x-1)^3(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(x^2+1)[(x+1)-(x-1)-1] - (x^2-1)}{(x-1)^2(x^4-1)} \\ &= \frac{2}{x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1}. \end{aligned}$$

9. Sia S un sottoinsieme di numeri reali e sia m un numero reale. Assegnata la proposizione

"Ogni elemento di S è minore o uguale ad m",

dire qual è la sua negazione.

(A) ogni elemento di S è maggiore di m

(B) m è il più grande di tutti gli elementi di S

(C) almeno un elemento di S è maggiore di m

(D) non ci sono elementi di S più grandi di m

(E) non ci sono elementi di S più piccoli di m

Soluzione: La risposta esatta è (C).

10. La squadra di calcio di una scuola gioca in un torneo otto partite. In quanti modi la squadra può ottenere cinque vittorie, due sconfitte e un pareggio?

(A) 28

(B) 56

(C) 168

(D) 336

(E) 40320

Soluzione: La risposta esatta è (C).

Si tratta sostanzialmente di scrivere in tutti i modi possibili una parola di otto lettere delle quali 5 coincidono con V (vittoria), 2 coincidono con S (sconfitta) e 1 con P (pareggio). Pertanto il numero richiesto è

$$\frac{8!}{5!2!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 168.$$

11. Studiare il comportamento all'infinito della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4 - 3x_n + x_n^2, \\ x_0 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

(A) non ammette limite

(B) il limite è 0

(C) il limite è 1

(D) il limite è 2

(E) il limite è $+\infty$

Soluzione: La risposta esatta è (D).

Si ha infatti:

(1) la successione è monotona non decrescente: $x_{n+1} - x_n = 4 - 4x_n + x_n^2 = (2 - x_n)^2 \geq 0$;

(2) per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, la successione ammette come limite 2 (che è un punto fisso per $f(x) = 4 - 3x + x^2$, risultando $x = 4 - 3x + x^2$, cioè $(2 - x)^2 = 0$) oppure $+\infty$;

(3) la successione ha come limite 2 o $+\infty$ a seconda che si abbia definitivamente $x_n < 2$ o $x_n > 2$;

(4) d'altra parte $x_{n+1} = 4 - 3x_n + x_n^2 < 2 \Leftrightarrow x_n^2 - 3x_n + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x_n < 2$.
Per induzione e per la monotonia si ha che se $\exists\, \bar{n} \,:\, 1 < x_{\bar{n}} < 2$ allora $\forall n > \bar{n}$, $1 < x_{\bar{n}} \leq x_n < 2$;

(5) l'asserto segue dal fatto che $1 < x_0 = \dfrac{3}{2} < 2$.

12. Un circolo tennis ha 640 membri e tutti votano per eleggere il presidente. La graduatoria è la seguente: Marco, Elisa, Valeria, Antonio. Sapendo che Marco ha avuto 19 voti in più di Elisa, Elisa ha avuto 38 voti in più di Valeria e Valeria ha avuto 15 voti in più di Antonio, quanti voti ha avuto Marco?

(A) 185

(B) 197

(C) 204

(D) 213

(E) 221

Soluzione: La risposta esatta è (B).

Indichiamo con M, E, V, A i voti dei quattro candidati rispettivamente. Abbiamo:

$$E = M - 19, \quad V = E - 38 = M - 57, \quad A = V - 15 = M - 72.$$

Di conseguenza:

$$M + E + V + A = 4M - 19 - 57 - 72 = 640, \quad \text{e quindi} \quad 4M = 788, \quad \text{e} \quad M = 197.$$

13. Quanto vale

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1)\sin x?$$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) $+\infty$

(E) non esiste

Soluzione: La risposta esatta è (A).

Si può procedere in vari modi. Ad esempio, si ha:

$$0 \leq \left|\sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1)\sin x\right| \leq \left|\sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1)\right|.$$

Per il teorema del confronto, basterà allora dimostrare che $\sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1) \to 0$ per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}} = \lim_{y\to0^+} \sqrt{y} \lim_{y\to0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 0 \cdot 1 = 0.$$

14. Dieci studenti fuorisede stanno per partire insieme dalla città in cui si trova la loro università verso la loro città di residenza. Hanno a disposizione due automobili, ciascuna delle quali può portare al più sei persone. In quanti modi diversi gli studenti si possono sistemare sulle due automobili?

(A) 462

(B) 672

(C) 924

(D) 1344

(E) 2520

Soluzione: La risposta esatta è (B).

Ordinate a piacere le due automobili, gli studenti si possono disporre

6 nella prima automobile e 4 nella seconda

oppure

5 nella prima automobile e 5 nella seconda

oppure

4 nella prima automobile e 6 nella seconda

Pertanto il numero richiesto è

$$\binom{10}{6} + \binom{10}{5} + \binom{10}{4} = 2\frac{10!}{6! \cdot 4!} + \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 672.$$

15. Sia p un numero primo. Dire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

(A) se $8p - 1$ è composto, allora $8p + 1$ è primo;

(B) se $8p - 1$ è composto, allora $8p + 1$ è composto;

(C) se $8p - 1$ è primo, allora $8p + 1$ è primo;

(D) se $8p - 1$ è primo, allora $8p + 1$ è composto;

(E) le quattro affermazioni precedenti sono tutte false.

Soluzione: La risposta esatta è (D).

(1) (A), (B), (C) sono false. Infatti un controesempio per (A) è $p = 7$; per (B) è $p = 2$; per (C) è $p = 3$.

(2) Proviamo (D). Se $p = 3$, $8p - 1 = 23$ è primo e $8p + 1 = 25$ è composto. Sia $p > 3$ e si supponga $8p - 1$ primo. Allora p non può essere della forma $p = 3k + 2$, $(k \in \mathbb{N})$, dato che in tal caso $8p - 1$ non sarebbe primo. Dunque p è del tipo $p = 3k + 1$ (per qualche $k \in \mathbb{N}$) e quindi $8p + 1 = 3(8k + 3)$ è composto.

Per dimostrare che (D) è vera, possiamo anche procedere come segue.

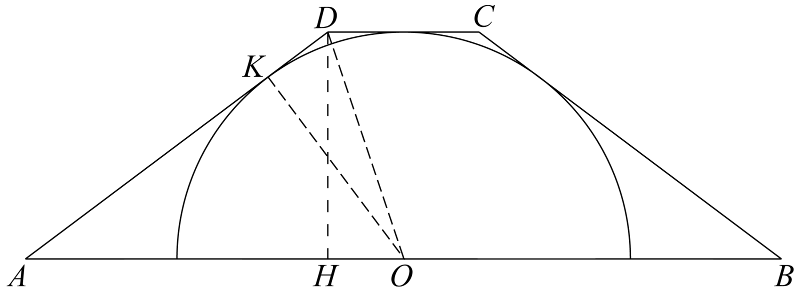
Osserviamo che per ogni intero p, i numeri $8p - 1$, $8p$ e $8p + 1$ sono consecutivi e quindi uno (ed uno solo) di essi è multiplo di 3 (infatti la divisione per 3 dà come resto 0, 1, o 2). Se $p = 3$, $8p = 24$ è multiplo di 3, $8p - 1 = 23$ è primo e $8p + 1 = 25$ è composto. Sia allora $p > 3$. Essendo p primo, $8p$ non può essere multiplo di 3, essendo poi per ipotesi $8p - 1$ primo, anch'esso non può essere multiplo di 3. Deve essere allora $8p + 1$ multiplo di 3, quindi $8p + 1$ è composto.

Sezione B: PROBLEMI A SINGOLA RISPOSTA

16. Dato un trapezio isoscele di lato obliquo 10 cm, circoscritto ad un semicerchio di raggio 6 cm, determinare il perimetro P del trapezio.

Soluzione: La risposta è 44 cm.

Con riferimento alla figura



si osservi che il centro O, equidistante dalle rette tangenti AD e DC, si trova sulla bisettrice dell'angolo in D: $A\widehat{D}O = O\widehat{D}C$. Ma $O\widehat{D}C = A\widehat{O}D$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele AB e DC tagliate dalla trasversale OD. Dunque $A\widehat{D}O = A\widehat{O}D$, ossia il triangolo AOD è isoscele su base OD. La base maggiore del trapezio ($AB = 2AO = 2AD$) misura allora 20 cm. Dal teorema di Pitagora applicato al triangolo AHD risulta

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{100 - 36}\ \text{cm} \ = 8\ \text{cm}.$$

Allora $HO = 2$ cm e $CD = 4$ cm. Si ha in definitiva:

$$P = (20 + 10 + 10 + 4)\ \text{cm} \ = 44\ \text{cm}.$$

In alternativa l'uguaglianza $AO = AD$ risulta anche dalla congruenza dei triangoli rettangoli AHD e AKO che hanno un angolo in comune e i cateti opposti a tale angolo uguali in quanto raggi della stessa circonferenza.

17. Scegliendo a caso due vertici di un decagono, quanto vale la probabilità che questi due vertici siano gli estremi di una diagonale del decagono?

Soluzione: La risposta è $\frac{7}{9}$.

In un poligono di n lati ci sono $\frac{n(n-1)}{2}$ modi per congiungere due suoi vertici. D'altra parte esso possiede $\frac{n(n-1)}{2} - n$ diagonali. Pertanto la probabilità richiesta vale

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2} - n}{\frac{n(n-1)}{2}} = 1 - \frac{2}{n-1} = \frac{n-3}{n-1}.$$

Per il decagono la probabilità richiesta vale quindi $\dfrac{7}{9}$.

18. Consideriamo la seguente lista di parole: FRA, REO, STA, TRE, ALI.

A tre studiosi di logica viene detta una sola lettera di una di queste parole e ad ognuno viene detta una lettera diversa da quella degli altri. Ai tre studiosi viene poi data l'informazione che con le lettere loro indicate si può costruire una sola delle parole della lista. Quando ad ognuno di loro viene chiesto se sia in grado di dire qual è la parola indicata, uno risponde immediatamente di sì, dopo qualche attimo anche un altro risponde di sì ed infine anche il terzo risponde di sì.

Qual è la parola?

Soluzione: La risposta è REO.

Le lettere che compaiono nelle parole scelte sono: A (3 volte), R (3 volte), E (2 volte), T (2 volte), F (1 volta), I (1 volta), L (1 volta), O (1 volta), S (1 volta). Dato che il primo studioso risponde immediatamente, deve avere una lettera tra quelle che compaiono una volta sola nelle parole indicate: F, I, L, O, S. A questo punto gli altri due sanno che la lettera che conosce il primo è F, I, L, O, S e quindi la parola non può essere TRE. Il secondo che risponde non può avere avuto la lettera A o la lettera R, dato che in questo caso non potrebbe affermare di conoscere la parola. Inoltre non può avere avuto la lettera S o la lettera O, dato che queste compaiono in una parola sola e le lettere avute dai tre studiosi formano un'unica parola. Deve avere avuto allora una delle lettere T oppure E (avendo escluso la parola TRE, T ed E vanno ora contate per una), oppure una delle lettere I, o L, se la parola proposta è ALI. Il terzo, affermando di conoscere la parola, non può avere avuto la lettera A che compare in FRA, STA, ALI e quindi la parola proposta deve essere REO. Da questo ragionamento segue anche che il primo ha avuto la lettera O, il secondo la lettera E e il terzo la lettera R.

19. Esprimere l'ipotenusa i di un triangolo rettangolo di area 25 in funzione del suo perimetro P.

Soluzione: La risposta è $i = \dfrac{P^2 - 100}{2P}$.

Detti a e b i due cateti, si ha: $a + b + i = P$, $a^2 + b^2 = i^2$ e $ab = 50$. Di conseguenza, risulta

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = i^2 + 100$$

e quindi

$$i^2 + 100 = (P - i)^2 = P^2 - 2Pi + i^2 \quad \text{e} \quad i = \frac{P^2 - 100}{2P}.$$

20. Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$\log\left(4 - 4\,|x+1| - x^2\right).$$

Soluzione: La risposta è $]2 - 2\sqrt{3}, 0[$.

L'argomento del logaritmo deve essere positivo. Per ottenere ciò si devono risolvere i due sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} 4 - 4(x+1) - x^2 > 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 4 + 4(x+1) - x^2 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

Dal primo sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 + 4x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

cioè $x \in [-1, 0[$. Dal secondo sistema segue:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 8 < 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

e quindi $x \in]2 - 2\sqrt{3}, -1[$.

In definitiva, la funzione assegnata è definita in $]2 - 2\sqrt{3}, -1[\cup [-1, 0[=]2 - 2\sqrt{3}, 0[$.

21. Nell'insieme dei numeri reali non negativi si consideri la funzione:

$$f_0(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Si definisca la seguente legge di composizione tramite la posizione

$$f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x)) \quad \text{per} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Determinare esplicitamente la forma del termine generale $f_n(x)$.

Soluzione: La risposta è $f_n(x) = \dfrac{x}{(n+1)x+1}$.

Infatti si ha

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x}{2x+1},$$

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{x}{3x+1},$$

da cui si deduce l'ipotesi di induzione:

$$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}.$$

La precedente relazione è vera per $n = 1$. Assumiamo che sia vera per $n = k$, cioè che:

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}$$

e dimostriamo che è vera per $n = k+1$. Si ha

$$f_{k+1}(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\Big(\frac{x}{(k+1)x+1}\Big) = \frac{x}{(k+2)x+1},$$

da cui segue l'asserto.

22. Fissato nel piano euclideo un riferimento ortonormale Oxy, si considerino i punti $A \equiv (1,1)$ e $B \equiv (2,2)$. Sia poi X un punto della retta r di equazione $y = x+3$. Determinare come varia l'area del triangolo ABX al variare del punto X sulla retta r.

Soluzione: La risposta è: l'area del triangolo ABX rimane invariata.

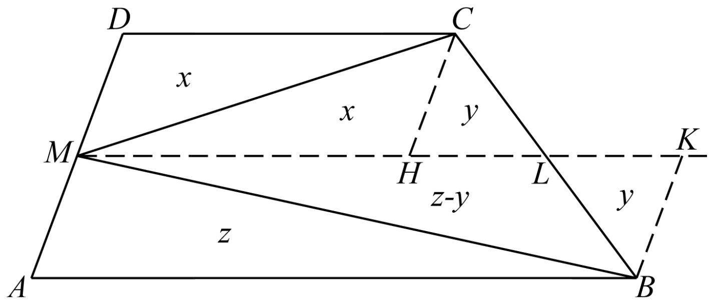
Infatti, i punti A e B sono sulla retta di equazione $y = x$ parallela alla retta r. Allora, qualunque sia il punto X sulla retta r, l'altezza del triangolo ABX, relativa alla base AB, rimane sempre la stessa e di conseguenza l'area rimane invariata.

Sezione C: PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

23. Sia $ABCD$ un trapezio e sia M il punto medio del lato obliquo AD. Dimostrare che il trapezio è equivalente al doppio del triangolo MBC.

Dimostrazione:

Diamo tre diverse dimostrazioni del problema.



(a) Con riferimento alla figura, l'area del trapezio è somma dell'area del triangolo BMC con quelle dei triangoli DMC e AMB. Questi ultimi hanno per base rispettivamente la base minore e la base maggiore del trapezio, mentre l'altezza relativa a tali basi è, per entrambi, la metà dell'altezza del trapezio (per il teorema di Talete). Pertanto la somma delle aree di tali triangoli è uguale alla metà dell'area del trapezio. Di conseguenza il triangolo BMC ha anch'esso area uguale alla metà di quella del trapezio.

(b) Sempre con riferimento alla figura, in cui MK è parallela alle basi del trapezio, CH e BK sono parallele al lato obliquo AD, si ha, poiché M è punto medio di AD

$$AM = MD = BK = CH.$$

Di conseguenza i triangoli MDC e MHC sono congruenti con area x, i triangoli CLH e BLK sono congruenti con area y, i triangoli MAB e MKB sono congruenti con area z. Allora l'area del triangolo MLB è $z - y$. Si ha infine

$$\text{Area del triangolo } MBC = x + y + z - y = x + z$$

$$\text{Area del trapezio } ABCD = x + x + y + z + z - y = 2(x + z)$$

da cui l'asserto.

(c) Con riferimento alla stessa figura, il triangolo BMC è somma dei due triangoli MLC e MLB. Considerando per questi due triangoli sempre la base ML, le altezze coincidono con le distanze della retta per M e L dalle basi, di conseguenza la somma di queste distanze coincide con l'altezza h del trapezio. Allora l'area del triangolo MBC è:

$$\frac{ML \cdot h}{2}.$$

Segue poi, sempre osservando la figura, che

$$ML = MH + HL = CD + HL = CD + \frac{AB - CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}$$

e quindi l'asserto è dimostrato.

24. Assegnata una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo T, dimostrare che:

(1) f è limitata;

(2) se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, allora necessariamente $f(x)$ è costante.

Dimostrazione:

(1) Per studiare una funzione periodica di periodo T basta ridursi all'intervallo $[0, T]$. In questo caso la funzione è una funzione continua in un compatto e, dunque, per il teorema di Weierstrass è dotata di minimo e massimo, da ciò si ricava, in particolare, la limitatezza.

(2) Diamo tre dimostrazioni diverse.

(a) A partire da un generico elemento $\bar{x} \in [0, T]$ si può costruire la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ponendo: $x_n = \bar{x} + nT$. Su ciascuna di tali successioni la funzione è costante per la periodicità e risulta: $f(x_n) = f(\bar{x})\ \forall n \in \mathbb{N}$, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x}).$$

Poiché la funzione è regolare a $+\infty$, tutte le successioni $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ devono ammettere lo stesso limite, ossia:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x}) = l = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

da cui si ricava:

$$f(\bar{x}) = l, \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

(b) Posto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l,$$

(con l finito per la (1)), per la definizione di limite si ha:

$$\forall \epsilon > 0\ \ \exists K > 0 : \forall x > K \quad l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

Se la funzione f non fosse costante dovrebbe assumere almeno un valore $m \neq l$ in un punto $\bar{x} \in [0, T]$. Scelto $\epsilon < |l - m|$ e supposto ad esempio $m < l$, si ha $\epsilon < l - m$, e quindi

$$m = f(\bar{x}) = f(\bar{x} + nT) < l - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché sicuramente esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ si ha $\bar{x} + nT > K$, si perviene ad un assurdo in quanto $f(\bar{x} + nT) \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[$ $(\forall n > \nu)$, in contrasto con la definizione di limite.

(c) Poiché la funzione è continua in un compatto, detti m ed M rispettivamente il minimo ed il massimo della funzione, f deve assumere tutti i valori dell'intervallo $[m, M]$ e, quindi, se la funzione ammette limite a $+\infty$, il limite l deve appartenere all'intervallo $[m, M]$ e deve verificare la seguente definizione:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists K > 0 \, : \, \forall x > K \quad l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

Scelto $\epsilon < \dfrac{M - m}{2}$ ed un intervallo di periodicità $[\bar{x}, \bar{x} + T] \subset]K, +\infty[$, con $\bar{x} \in \mathbb{R}$, dalla definizione di limite, si ha:

$$m \leq l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon \leq M \qquad \forall x \in [\bar{x}, \bar{x} + T]$$

da cui l'assurdo. Infatti, per la scelta fatta di ϵ non può essere contemporaneamente $m = l - \epsilon$ e $M = l + \epsilon$, quindi, i valori assunti dalla funzione f non coprono tutto l'intervallo $[m, M]$ ma soltanto i valori dell'intervallo $]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

25. Dimostrare che esistono infiniti numeri naturali *non nulli* n tali che, simultaneamente, $\dfrac{n}{2}$ sia il quadrato di qualche numero naturale, $\dfrac{n}{3}$ il cubo di qualche numero naturale e $\dfrac{n}{5}$ la quinta potenza di qualche numero naturale. Detto m il più piccolo di tali numeri, determinare l'intero k tale che $10^k \leq m \leq 10^{k+1}$.

Dimostrazione:

Dalle ipotesi segue che n è multiplo di 30: $n = 30h$. È inoltre chiaro che se n' è una soluzione del problema, tale sarà anche il prodotto di n' per una potenza trentesima la cui base non è multipla né di 2, né di 3, né di 5. Per i nostri scopi, sarà allora sufficiente provare che esiste una soluzione nel caso che h contenga solo i fattori 2, 3 e 5. Sia dunque $h = 2^x 3^y 5^z$. Si avrà allora

$$15h = 2^x 3^{y+1} 5^{z+1} \text{ è un quadrato,}$$

$$10h = 2^{x+1} 3^y 5^{z+1} \text{ è un cubo,}$$

$$6h = 2^{x+1} 3^{y+1} 5^z \text{ è una quinta potenza.}$$

Da queste tre relazioni risulta che per gli interi positivi x, y e z valgono le condizioni

- x è pari ed $x+1$ è multiplo di 3 e di 5, pertanto x è del tipo $15a-1$, dove a è un qualunque intero positivo dispari;

- y è multiplo di 3 ed $y+1$ è multiplo di 2 e di 5, pertanto y è del tipo $10b-1$, dove b è il successivo di un multiplo (positivo o nullo) di 3;
- z è multiplo di 5 e $z+1$ è multiplo di 2 e di 3, pertanto z è del tipo $6c-1$, dove c è il successivo di un multiplo (positivo o nullo) di 5.

In conclusione si avrà

$$n = 2^{15a}3^{10b}5^{6c}$$

con infinite possibilità per a, b, c.

Dunque, da quanto dimostrato segue ovviamente che ogni naturale della forma

$$\nu = 2^{15a}3^{10b}5^{6c}\bar{n}^{30},$$

con $\bar{n} \in \mathbb{N}^{\#}$ (dove $\mathbb{N}^{\#} = \mathbb{N} - \{0\}$), primo con 2, 3 e 5, verifica le condizioni richieste.

Il minimo m si avrà ovviamente per $a = b = c = 1$ e $\bar{n} = 1$:

$$m = 2^{15}3^{10}5^{6} = 2^{9}3^{10}10^{6}.$$

Poiché $10^7 < 3 \cdot 6^9 < 10^8$, si ha

$$10^{13} < m < 10^{14}$$

e quindi $k = 13$ (dunque m è maggiore di diecimila miliardi!).