Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 12 Aprile 2013
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 18 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per gli undici problemi numerati da 1 a 11 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I cinque problemi numerati da 12 a 16, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 6 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 17 e 18, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 15.
- Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. Hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA

Problema 1. Indicato con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, siano $A \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Si determini la negazione della seguente affermazione:

b è maggiore di ogni elemento di A.

(A) b è minore di ogni elemento di A

(B) b è minore di almeno un elemento di A

(C) Almeno un elemento di A non è minore di b

(D) Non esistono elementi di A maggiori di b

(E) Ogni elemento di A è minore di b

Soluzione 1. La risposta esatta è quella contrassegnata con (C).
Infatti per negare l'affermazione assegnata basta richiedere l'esistenza di un elemento (almeno uno) di A che sia o uguale a b o maggiore di b ovvero, più succintamente, richiedendo l'esistenza di almeno un elemento di A che sia non minore di b.

Problema 2. Nel triangolo ABC sono note le lunghezze dei lati AB e AC e l'ampiezza dell'angolo α compreso tra essi: $\overline{AB} = 2$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm e $\alpha = \pi/6$. Si determini la lunghezza del lato BC.

(A) $\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$ cm

(B) $\sqrt{5}$ cm

(C) $\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ cm

(D) $\sqrt{7}$ cm

(E) Nessuna delle precedenti

Soluzione 2. La risposta esatta è quella contrassegnata con (A).
Con riferimento alla Figura 1, si ha:

$$\overline{AD} = \overline{AC}\cos\alpha, \qquad \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} \qquad \text{e} \qquad \overline{CD} = \overline{AC}\sin\alpha.$$

Dopo di ciò:

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{\left(\overline{AC}\cos\alpha - \overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{AC}\sin\alpha\right)^2} = \sqrt{\left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha} \\ &= \sqrt{9 + 4 - 12\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \text{cm} = \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}\ \text{cm}.\end{aligned}$$

Problema 3. Individuare quale tra i seguenti limiti di successione

(A) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n - \sqrt{n^2+6}}{n} = 2$

(B) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n^2-1}}{n} = 2$

(C) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n - \sqrt{4n^2+1}}{2n} = +\infty$

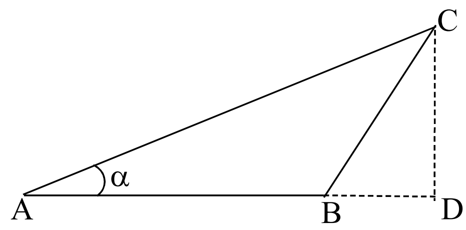

Figura 1: ad illustrazione del Problema 2.

(D) $\lim_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{6n^2+n}\right) = -\infty$

(E) $\lim_{n\to\infty} \left(4n - \sqrt{n^2-1}\right) = +\infty$

è errato.

Soluzione 3. Il limite errato è quello della risposta contrassegnata con (C).
Infatti, risulta correttamente

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3n-\sqrt{n^2+6}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n - n\sqrt{1+\frac{6}{n^2}}}{n} = 2,$$

$$\text{(B)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n} = 2,$$

$$\text{(D)} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{6n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(2 - \sqrt{6+\frac{1}{n}}\right) = -\infty,$$

$$\text{(E)} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(4n - \sqrt{n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(4 - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = +\infty,$$

mentre, per la (C) si ha invece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-\sqrt{4n^2+1}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n - 2n\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Problema 4. Si considerino i polinomi sul campo reale $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
h(x) &= 9x^7 + 2x^5 + 20x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 4x,\\
k(x) &= 9x^6 + 2x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 5x + 2,\\
f(x) &= h^2(x),\\
g(x) &= h(x) + k(x).
\end{aligned}$$

Quante sono le radici reali comuni a $f(x)$ e $g(x)$?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Soluzione 4. La risposta esatta è quella contrassegnata con (D).
Segue subito dal teorema di Ruffini che le radici reali comuni a $f(x)$ e $g(x)$, cioè gli elementi dell'insieme $S = \{c \in \mathbb{R} \mid f(c) = 0 = g(c)\}$, sono tutte e sole le radici reali del massimo comune divisore monico, $d(x)$, tra $f(x)$ e $g(x)$: $S = \{c \in \mathbb{R} \mid d(c) = 0\}$. Chiaramente, poiché ogni fattore irriducibile comune a $f(x)$ e $g(x)$ è pure comune a $h(x)$ e $k(x)$ (il viceversa è ovvio) si ha:

$$d(x) := \text{mcd}\,(f(x), g(x)) = \text{mcd}\,(h(x), k(x))\,.$$

Per calcolare $d(x)$, si può utilizzare l'algoritmo euclideo delle divisioni successive. Si ha:

$$h(x) = k(x)q_1(x) + r_1(x), \qquad k(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \qquad r_1(x) = r_2(x)q_3(x),$$

con

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x, & r_1(x) &= 9x^4 - 7x^2 + 2x, \\ q_2(x) &= x^2 + 1, & r_2(x) &= 9x^3 - 7x + 2, \\ q_3(x) &= x, & r_3(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dunque (essendo l'ultimo resto non nullo) $r_2(x)$ è un mcd $(h(x), k(x))$. In conclusione il massimo comune divisore monico tra $f(x)$ e $g(x)$ è

$$d(x) = x^3 - \frac{7}{9}x + \frac{2}{9}.$$

Si vede subito che $d(-1) = 0$, da cui segue che

$$d(x) = (x+1)\left(x^2 - x + \frac{2}{9}\right) = (x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Pertanto $S = \left\{-1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Problema 5. Un pallone da calcio di volume V viene venduto già gonfiato in una scatola. Sapendo che esso tocca tutte le facce della scatola, determinare il volume rimanente nella scatola.

(A) Non si può risolvere con i dati a disposizione

(B) $\left(\frac{6}{\pi} - 1\right) V$

(C) $\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) V$

(D) $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) V$

(E) $\frac{V}{2}$

Soluzione 5. La risposta esatta è quella contrassegnata con (B).
La scatola ha la forma di un cubo dal momento che il pallone tocca ciascuna delle sue facce; ne consegue che il lato della scatola è pari al doppio del raggio del pallone. Quindi, indicato con R il raggio del pallone, V_r la quantità da determinare e con V_s il volume della scatola, si ha:

$$\begin{aligned} V_r = V_s - V &= \left(8R^3 - \frac{4\pi R^3}{3}\right) = \left(\frac{6}{\pi}\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}\right) \\ &= \left(\frac{6}{\pi}V - V\right) = \left(\frac{6}{\pi} - 1\right)V. \end{aligned}$$

Problema 6. Siano $N = \{1, 2, \ldots n, \ldots\}$, $D = \{1, 3, \ldots, 2n+1, \ldots\}$ e $P = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$. Stabilire quale tra le seguenti applicazioni è biunivoca.

(A) $n \in D \mapsto 2n \in P$

(B) $n \in P \mapsto 2n - 1 \in D$

(C) $n \in N \mapsto n^2 \in N$

(D) $n \in P \mapsto n - 1 \in D$

(E) $n \in D \mapsto n + 1 \in N$

Soluzione 6. La risposta esatta è quella contrassegnata con (D).
Per l'applicazione in (A) si ha che la controimmagine di $4 \in P$ è vuota.
Per l'applicazione in (B) si ha che la controimmagine di $1 \in D$ è vuota.
Per l'applicazione in (C) si ha che la controimmagine di $3 \in N$ è vuota.
Per l'applicazione in (E) si ha che la controimmagine di $1 \in N$ è vuota.
Indichiamo con f l'applicazione in (D). Con $d \in D$ si ha che $f^{-1}(d) = \{d + 1\} \subset P$.

Problema 7. Determinare il seguente limite di funzione di variabile reale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}.$$

(A) 0

(B) 1

(C) $+\infty$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) Non esiste

Soluzione 7. La risposta esatta è quella contrassegnata con (D).
Infatti, applicando il teorema di De l'Hôpital si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

Problema 8. Sono assegnate le parabole:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \qquad & y = 3x^2 - 2x + 1, \\ \gamma_2 : \qquad & y = 5x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Determinare quale tra le seguenti affermazioni è quella vera.

(A) γ_1 e γ_2 hanno due punti distinti in comune

(B) γ_1 e γ_2 non sono tangenti

(C) γ_1 e γ_2 sono tangenti

(D) γ_1 e γ_2 hanno lo stesso vertice

(E) γ_1 e γ_2 hanno lo stesso fuoco

Soluzione 8. L'affermazione vera è quella contrassegnata con (C).
Infatti, in primo luogo bisogna escludere la risposta contrassegnata con (D) in quanto il vertice di γ_1 giace sulla retta di equazione $x = 1/3$ mentre quella di γ_2 giace sulla retta di equazione $x = 1/5$. Per lo stesso motivo bisogna escludere la risposta contrassegnata con (E), dal momento che fuoco e vertice giacciono sulla stessa retta. La risposta contrassegnata con (A) è da escludere in quanto le due parabole appartengono allo stesso fascio che ha l'unico punto base $A = (0, 1)$. In A, la retta tangente sia a γ_1 che a γ_2 ha -2 come coefficiente angolare e pertanto le due parabole sono tangenti in tale punto.

Problema 9. Data la funzione di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -2, \\ \dfrac{ax - 1}{3}, & -2 \leq x < 0, \\ a + \dfrac{23}{3} + x, & x \geq 0, \end{cases}$$

determinare per quali valori del parametro reale a la funzione è continua in $\mathbb{R}$.

(A) -8

(B) 0

(C) nessun valore di a

(D) -2

(E) 0 e $\dfrac{23}{3}$

Soluzione 9. L'affermazione vera è quella contrassegnata con (A).
Infatti, la funzione $f(x)$ è continua se

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = f(-2) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Per la definizione di $f(x)$, i precedenti limiti conducono a scrivere le condizioni

$$5 = \frac{-2a - 1}{3} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{3} = a + \frac{23}{3},$$

che sono entrambe soddisfatte solo per $a = -8$.

Problema 10. Dieci copie di un libro devono essere ripartite fra tre scuole in modo che che la prima scuola ne riceva almeno 4 e la terza almeno 2. Determinare il numero dei modi con i quali può essere effettuata la ripartizione.

(A) 64

(B) 4

(C) 81

(D) 1000

(E) 15

Soluzione 10. La risposta esatta è quella contrassegnata con (E).
Bisogna dapprima escludere dalla ripartizione le 4 copie certamente spettanti alla prima scuola e le 2 copie certamente spettanti all'ultima scuola. Le copie effettivamente da ripartire tra le tre scuole sono pertanto solo quattro. Indichiamo con x il numero delle copie da dare alla prima scuola, y quello da dare alla seconda scuola e z quello da dare alla terza scuola. Si tratta di determinare il numero delle terne di numeri naturali che risolvono l'equazione $x + y + z = 4$. La soluzione è 15 e può essere individuata elencando le terne (0,0,4), (0,1,3), (0,2,2), (0,3,1), (0,4,0), (1,0,3), (1,1,2), (1,2,1), (1,3,0), (2,0,2), (2,1,1), (2,2,0), (3,0,1), (3,1,0) e (4,0,0). In alternativa, si può osservare che il problema è equivalente a quello di collocare 4 biglie indistinguibili in tre contenitori ognuno dei quali ne può ospitare da 0 a 4; ne risulta che la soluzione è fornita dal numero delle 4-combinazioni con ripetizione ottenute da un insieme di 3 elementi: $C^{(r)}_{3,4} = C_{3+4-1,4} = C_{6,4} = 15$.
($C^{(r)}_{n,k}$ indica il numero delle k-combinazioni con ripetizione ottenute da un insieme di n elementi. $C_{n,k}$ indica il numero delle k-combinazioni semplici ottenute da un insieme di n elementi; esso equivale al coefficiente binomiale n su k.)

Problema 11. Sia A l'insieme dei numeri binari con tre cifre. In $A \times A$ si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita dalla posizione:

$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ e } y \text{ presentano lo stesso numero di volte la cifra } 1.$$

Determinare quale tra le seguenti affermazioni è quella vera.

(A) $\mathcal{R}$ è una relazione antiriflessiva

(B) $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza

(C) $\mathcal{R}$ gode della proprietà antisimmetrica

(D) $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine

(E) nessuna delle precedenti

Soluzione 11. La risposta esatta è quella contrassegnata con (B).
Infatti, è banale verificare che $\mathcal{R}$ gode della proprietà riflessiva; ciò esclude la risposta contrassegnate con (A). Ma è parimenti immediato verificare che $\mathcal{R}$ gode della proprietà simmetrica; ciò, evidentemente, esclude le risposte contrassegnate con (C) e (D). Inoltre, se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ si può affermare che x e z presentano lo stesso numero di volte la cifra 1 di y e pertanto $x\mathcal{R}z$. La relazione $\mathcal{R}$ gode in tal modo della proprietà transitiva che, per quanto detto in precedenza, comporta che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 12. Determinare due interi $a > b > 0$ che verificano le seguenti tre condizioni:

$$\text{mcm}(a, b) - \text{mcd}(a, b) = 143; \quad 11 < \text{mcd}(a, b) < 143; \quad \text{mcd}(a, b) < b.$$

Soluzione 12. Siano $\text{mcd}(a, b) = d$, $a_1 = a/d$ e $b_1 = b/d$. Allora

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \quad \text{con } a_1 \text{ e } b_1 \text{ coprimi},$$

e

$$\text{mcm}(a, b) = a_1 b_1 d.$$

La prima condizione si può scrivere al seguente modo

$$a_1 b_1 d - d = 143 \iff (a_1 b_1 - 1)d = 11 \cdot 13.$$

La seconda condizione fornisce $d = 13$ e

$$a_1 b_1 - 1 = 11 \iff a_1 b_1 = 12.$$

Per la terza condizione deve essere $b_1 > 1$ e quindi, essendo $a_1 > b_1$, dalla precedente relazione e dal fatto che a_1 e b_1 sono coprimi si deduce che $a_1 = 4$ e $b_1 = 3$. Dunque $a = 4 \cdot 13 = 52$ e $b = 3 \cdot 13 = 39$.

Problema 13. Due edifici con tetto piano sono posti uno di fronte all'altro a distanza di 20 m. Un osservatore A è in cima al tetto dell'edificio più basso e sa che il tetto C dell'edificio più alto si trova ad una distanza di 40 m. L'angolo sotto cui A vede la base B dell'altro edificio è $\beta = 30°$. Si determi l'altezza dell'edificio più alto.

Soluzione 13. Dal fatto che $\overline{AM} = 20$ m si ricava, immediatamente, che l'altezza del palazzo più basso vale:

$$\overline{BM} = \overline{AM} \tan \beta = \overline{AM} \tan 30° = 20\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}.$$

Inoltre, l'angolo α vale $60°$ dal momento che risulta

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{40 \text{ m}}{20 \text{ m}} = \frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda l'altezza del palazzo più alto, dal fatto che

$$\overline{MC} = \overline{AC} \sin \alpha = \overline{AC} \sin 60° = 20\sqrt{3} \text{ m},$$

si ha:

$$\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MC} = 20\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m} + 20\sqrt{3} \text{ m} = \frac{80\sqrt{3}}{3} \text{ m}.$$

Problema 14. Calcolare il seguente limite di funzione di variabile reale:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{x}.$$

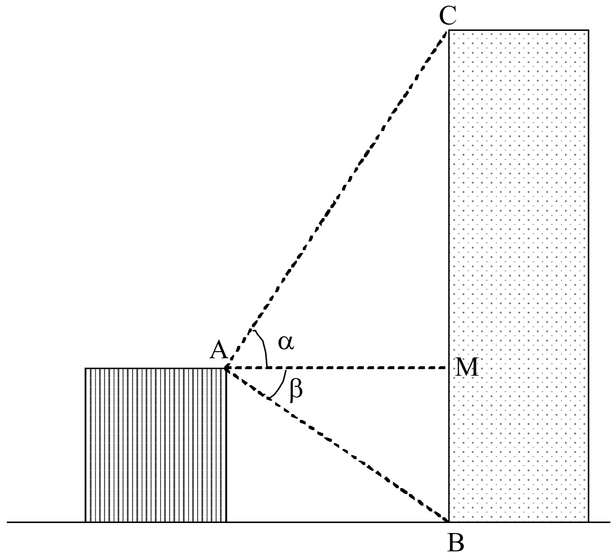

Figura 2: ad illustrazione del Problema 13.

Soluzione 14. Si osservi in primo luogo che:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x} &= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}\right)}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}\right)} = \frac{x-\sin x}{x}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}} \\ &= \frac{x-\sin x}{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}\right)^{-1} = \frac{x-\sin x}{x}\left[\sqrt{x}\left(1+\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}\right)\right]^{-1} \\ &= \frac{x-\sin x}{x\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Ne consegue, pertanto che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x\sqrt{x}}\lim_{x\to 0^+}\left(1+\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^{3/2}},.$$

da cui, applicando il teorema di De l'Hôpital si ricava che:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^{3/2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{2(1-\cos x)}{3x^{1/2}} == \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Problema 15. Un gelataio riempie una coppetta a forma di tronco di cono di altezza 5 cm e le cui basi, superiore ed inferiore, si possono rappresentare, rispettivamente, con le disequazioni $x^2+y^2 \leq 16$ e $x^2+y^2 \leq 9$. Inoltre, egli ricopre la la base maggiore della coppetta con altro gelato a forma di semisfera. Una goccia inizia a scivolare dalla cima della semisfera; quanti cm di gelato deve percorrere per arrivare sul piano della base inferiore?

Soluzione 15. Con riferimento alla Figura 3, la goccia di gelato deve percorrere la distanza $d = \overset{\frown}{CA} + \overline{AA'}$.

In primo luogo è evidente che $h = \overline{OO'} = 5$ cm. Inoltre, dalla disequazione che rappresenta la base superiore della coppetta si ricava immediatamente che il raggio R della base superiore vale 4 cm; in maniera analoga si ricava che il raggio r della base inferiore vale 3 cm.

La distanza $\overset{\frown}{CA}$ è pari alla lunghezza di un quarto di circonferenza con raggio R:

$$\overset{\frown}{CA} = 2\pi R/4 = 2\pi \text{ cm}.$$

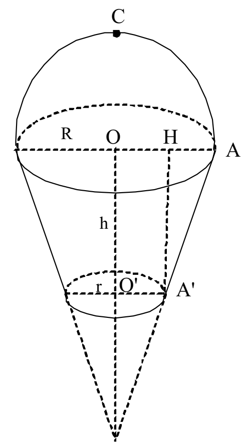

Figura 3: ad illustrazione del Problema 15.

La distanza $\overline{AA'}$ si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHA':

$$\overline{AA'} = \sqrt{\left(\overline{AH}\right)^2 + \left(\overline{HA'}\right)^2} = \sqrt{(R-r)^2 + h^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}\ \text{cm}.$$

In definitiva, si ha che $d = \left(2\pi + \sqrt{26}\right)$ cm.

Problema 16. Si consideri la funzione $f(x) = |3x^2 - 2x|$, con $x \in \mathbb{R}$. Verificare che essa nell'intervallo $[1, 4]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange e determinare il punto c da esso previsto.

Soluzione 16. Il trinomio di secondo grado $3x^2 - 2x$ si annulla in 0 e in 2/3; pertanto la funzione considerata può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x, & x \leq 0, \\ -3x^2 + 2x, & 0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}, \\ 3x^2 - 2x, & x \geq \dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

dalla quale se ne deduce che essa è derivabile, e quindi continua, nell'intervallo $[1, 4]$. La funzione $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange e per determinarne il punto c da esso previsto basta imporre la condizione:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \iff 6c - 2 = \frac{40 - 1}{3}$$

da cui si ricava $c = 5/2$.

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 17. Nel triangolo ABC si indichi con α l'angolo formato dai lati AB e AC, e con β l'angolo tra il lato BC e il prolungamento di AB. Sia H il punto in cui la verticale ad AB passante per B incontra il lato AC. Dimostrare che

$$\overline{HC} = \overline{BC}\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Soluzione 17. Con riferimento alla Figura 4, tenendo conto che $\gamma = \beta - \alpha$, applicando il teorema dei seni ai triangoli BCH, ABH e ABC, si ottiene rispettivamente:

$$\frac{\overline{HC}}{\sin(\pi/2-\beta)} = \frac{\overline{BH}}{\sin(\beta-\alpha)}, \qquad \frac{\overline{BH}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\pi/2-\alpha)}, \qquad \frac{\overline{AB}}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha}.$$

Utilizzando di seguito le relazioni sopra determinate si ha:

$$\overline{HC} = \overline{BH}\,\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \overline{AB}\tan\alpha\,\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \overline{BC}\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

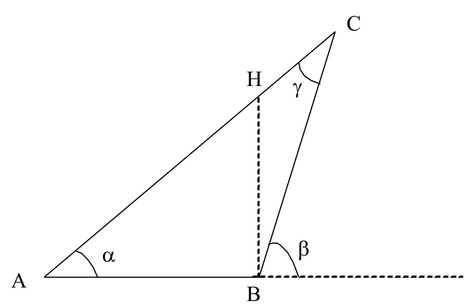

Figura 4: ad illustrazione del Problema 17.

Problema 18. Si consideri la funzione di variabile reale:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2x+3}, & x < -\frac{3}{2}, \\ \\ a^2(4x^2-9)+a, & x \geq -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che f è continua in $\mathbb{R}$, qualunque sia il valore del parametro reale a.

(ii) Si dica per quali valori di a la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$.

(iii) Si dica, motivando la risposta, se, per $a = \frac{1}{9}$, esistono almeno due punti del grafico di f in corrispondenza dei quali le tangenti sono tra loro parallele.

Soluzione 18. Dimostriamo in primo luogo la continuità di f in $\mathbb{R}$. La funzione f è continua in $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ perché ivi si riduce ad una funzione composta da funzioni elementari continue. Inoltre,

$$\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} ae^{2x+3} = a = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} f(x)$$

e questo completa la dimostrazione della parte (i).
Per ottenere i valori di a per i quali la f è derivabile in $\mathbb{R}$, osserviamo come fatto in precedenza che essa è derivabile, per qualsiasi valore di a, in $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ perché ivi si riduce ad una funzione

composta da funzioni elementari derivabili. Inoltre, la derivata destra e sinistra di f sono date, rispettivamente, da:

$$f'_+(x) = 8a^2x; \qquad f'_+(x) = 2ae^{2x+3}.$$

La funzione f è derivabile in $x = -\frac{3}{2}$ se e solo se $f'_+(-\frac{3}{2}) = f'_-(-\frac{3}{2})$, il che accade, come subito si verifica, se $a = 0$ oppure $a = -\frac{1}{6}$. In definitiva, f è derivabile in $\mathbb{R}$ per $a = 0$ o per $a = -\frac{1}{6}$ e ciò fornisce la risposta alla parte (ii).
Per $a = \frac{1}{9}$ si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}e^{2x+3} & x < -\frac{3}{2}, \\ \\ \frac{4}{81}x^2, & x \geq -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}e^{2x+3}, & x < -\frac{3}{2}, \\ \\ \frac{8}{81}x, & x > -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Pertanto, per $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ il codominio di f' è l'intervallo $\left(0, \frac{2}{9}\right)$. Inoltre, osservato che $y = \frac{4}{81}x^2$ rappresenta una parabola che volge la concavità verso l'alto e con vertice coincidente con l'origine degli assi cartesiani, si ha che la restrizione di f' all'intervallo $(0, +\infty)$ ha per codominio l'intervallo $(0, +\infty)$. Ne consegue che, fissato $b \in \left(0, \frac{2}{9}\right)$, esistono certamente $x_1 \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ e $x_2 \in (0, +\infty)$ tali che le tangenti al grafico nei punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ hanno lo stesso coefficiente angolare b e pertanto esse sono parallele. Ciò completa la dimostrazione della parte (iii).