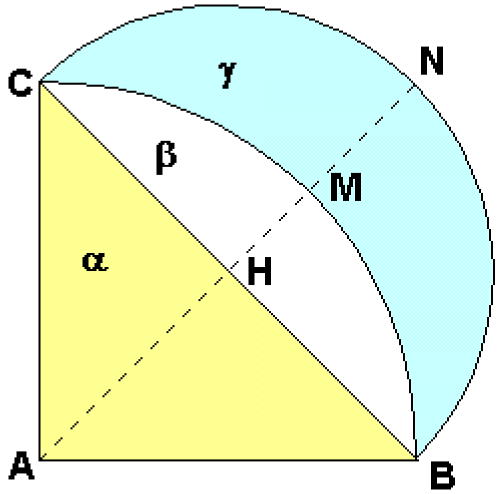
GEOMETRIA EUCLIDEA

Sia ABC un triangolo rettangolo isoscele e H il punto medio dell'ipotenusa BC. Sia inoltre l'arco BMC un quarto della circonferenza di centro A e raggio AB e l'arco BNC metà della circonferenza di centro H e raggio HB. La figura delimitata dai due archi si chiama lunula di Ippocrate di Chio (pitagorico vissuto nella seconda metà del quinto secolo a. C.) Dimostra che l'area della lunula BMCN è uguale a quella del triangolo rettangolo ABC

Soluzione:



Indichiamo con a la lunghezza del cateto AB.
Per il teorema di Pitagora, abbiamo che $CB = a\sqrt{2}$, $BH = (a\sqrt{2})/2$.

L'area del triangolo ABC è: $a^2/2$

L'area della lunula è la differenza fra le aree del semicerchio BNC e del settore circolare BMC.
Area semicerchio BNC $= \pi \cdot BH^2/2 = \pi a^2/4$
Area settore BMC $= \pi \cdot AB^2/4 - a^2/2 = \pi a^2/4 - a^2/2$

Area lunula $= \pi a^2/4 - \pi a^2/4 + a^2/2 = a^2/2$

Come si vede, i due termini $\pi a^2/4$ si eliminano a vicenda e rimane $a^2/2$, che è proprio l'area del triangolo rettangolo.

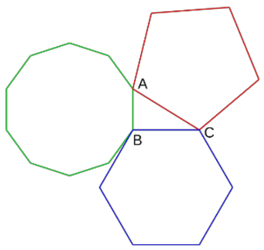
TRIGONOMETRIA

Nel libro XIII dei suoi Elementi, Euclide dimostra la seguente proposizione:

> « Se si iscrive in un cerchio un pentagono equilatero, il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono regolari che siano inscritti nello stesso cerchio. »

verifica tale preposizione applicando i teoremi della trigonometria.

Soluzione:



Ammesso che il cerchio in cui si inscrivono i poligoni abbia raggio unitario, le formule che esprimono le lunghezze del lato L_5 del Pentagono, L_6 dell'Esagono e L_{10} del Decagono, sono le seguenti:

$$L_5 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

$$L_6 = 1$$

$$L_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Allora:

$$\sqrt{L_6^2 + L_{10}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} = L_5$$

Quindi dato che la somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono dà il quadrato del lato del pentagono, ne consegue che il lato del pentagono è ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono i lati dell'esagono e del decagono.

Considera il ramo dell'iperbole *xy=4* contenuto nel primo quadrante. Trova quale dei suoi punti è più vicino al punto *P(0; -15)*

SOLUZIONE

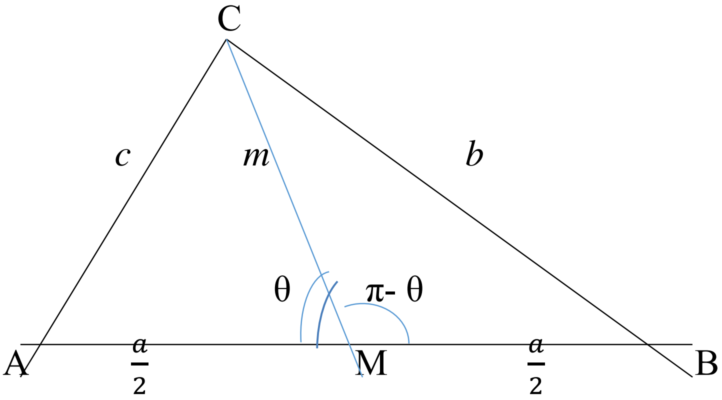
Sia Q il punto dell'iperbole $y=\frac{4}{x}$ più vicino al punto P; per cui $Q\left(x_0;\frac{4}{x_0}\right)$ $con\ x_0 > 0$. La retta passante per P e Q ha coefficiente angolare $m=\frac{4}{x_0^2}+\frac{15}{x_0}$. Tale retta è perpendicolare alla retta tangente all'iperbole nel punto Q il cui coefficiente angolare è $m_t=y'(x_0)=-\frac{4}{x_0^2}$. Imponendo la condizione di perpendicolarità $m \cdot m_t = -1$ si ottiene dopo semplici calcoli la seguente equazione: $x_0^4 - 60x_0 - 16 = 0$. Tale equazione (applicando Ruffini) si scompone in

$(x_0-4)(x_0^3+4x_0^2+16x_0+4)=0$ che ha l'unica soluzione $x_0 = 4$, poiché il secondo fattore non si annulla mai. Pertanto Q $(4\ ;1)$.

Sia ABC un triangolo con $\overline{AB}$ $=a$, $\overline{BC}$ $=b$ *e* $\overline{CA}$ $=c$. *Sia* $\overline{CM}$ $=m$ la mediana relativa al lato $\overline{AB}$. Dimostra che

$2m^2 = b^2+c^2-\frac{a^2}{2}$

SOLUZIONE



Poniamo $A\widehat{M}C$= θ , quindi $B\widehat{M}C$= π- θ . Applichiamo il teorema di Carnot (o del coseno) ai triangoli *AMC* e *MBC* rispettivamente . Si ha :

in *AMC* : $c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 - \cancel{2}\frac{a}{\cancel{2}} m\cos\theta$

in *MBC* : $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 - \cancel{2}\frac{a}{\cancel{2}} m\cos(\pi - \theta) =$

$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 + a\, m\cos\theta$

Sommando membro a membro si ha : $c^2+b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2m^2$; da qui

$2m^2 = c^2+b^2 - 2\frac{a^2}{4} = c^2+b^2 - a^2$ *c.v.d.*