LSS “Giuseppe Mercalli”

Prova di selezione interna per il VI certamen nazionale di matematica “Renato Caccioppoli”

NAPOLI, 19 Febbraio 2016
Tempo a disposizione: 2 ore

1. Dimostra che ogni cubica ha come centro di simmetria il suo punto di flesso.
2. Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, sia t la tangente in C alla circonferenza ABC. Dimostrare che la perpendicolare condotta da A alla retta t, interseca il prolungamento di BC nel suo punto D tale che BC=CD.
3. Sia k la lunghezza dello spigolo di un cubo. Qual è la superficie del solido i cui vertici sono i punti medi degli spigoli del cubo?
4. Spiega perché non si può dimostrare che il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$ tende a 1 utilizzando soltanto la regola di De L’Hopital.
5. Verificare che l’iperbole equilatera di equazione $xy = 3$ è intersecata dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 10$ negli stessi punti nei quali detta iperbole è tagliata dalla coppia di rette di equazioni $y = -x + 4$ ed $y = -x - 4$
6. Sui lati opposti AB e CD del rettangolo ABCD ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza α. Sapendo che il perimetro dell’esagono APBCQD è 2p, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l’area dell’esagono risulti massima.
7. Quanto può valere la somma dei quadrati di due numeri reali il cui prodotto vale k^2?
8. E’ data l’equazione $\cos^4 x + \text{sen}^4 x = k$. Dire per quali valori di k esistono soluzioni.

Soluzione quesito 1 – Determiniamo l'ascissa del punto di flesso calcolando gli zeri della derivata seconda

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

Allora

$$y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{3a} \Rightarrow F\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)$$

la curva ha centro di simmetria F se è invariante rispetto alla sostituzione

$$\begin{cases} x \to 2\left(-\dfrac{b}{3a}\right) - x \\ y \to 2\left(\dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a} + d\right) - y \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della cubica si ha:

$$\frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2bc}{3a} + 2d - y = a\left(-\frac{2b}{3a} - x\right)^3 + b\left(-\frac{2b}{3a} - x\right)^2 + c\left(-\frac{2b}{3a} - x\right) + d$$

semplificando si ha: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \;\Rightarrow$ ogni cubica è simmetrica rispetto al proprio punto di flesso.

Soluzione quesito 2 – Poiché ABC è un triangolo rettangolo allora è inscritto in una circonferenza. Posto CAB=x con 0≤x≤90° si ha che ACO=x perché AO=OC=r. Ma, detto H il punto d'intersezione della tangente in C con la perpendicolare alla retta t condotta da A, HCO =90° (il raggio è perpendicolare alla tangente nel punto C), quindi HCA=90°-x. AHC=90° per ipotesi, quindi nel triangolo ACH si ha che HAC=x. Nel triangolo ABC si ha ABC=90°-x; ACB=90°⟹ACD=90°. Nel triangolo rettangolo ACD si ha che CDA=90°-x. Il triangolo DAB è isoscele sulla base BD perché ADC≅ABC=90°-x e poiché AC è l'altezza allora è anche mediana ⟹ BC≅CD c.v.d.

Soluzione alternativa: CO ∥ AH perché retta perpendicolare alla stessa retta HC. ACB=90°, posto CAO=x 0<x<90° CBO=90°-x ma OCB=90°-x perché CO≅OB. Poiché CO ∥ AD⟹ADC≅OCB perché angoli corrispondenti delle rette AD ∥ CO tagliate dalla trasversale BD. Quindi ADC≅OCB≅OBC=90°-x. Il triangolo ADB è isoscele sulla base DB; poiché AC è perpendicolare a DB, è l'altezza che in un triangolo isoscele è anche mediana ⟹ BC≅CD c.v.d.

Soluzione quesito 3 - Si tratta di un "cubottaedro" uno dei tredici solidi archimedei ottenuto troncando le otto cuspidi del cubo. La superficie si ottiene addizionando l'area dei sei quadrati e degli otto triangoli equilateri che lo compongono. Lo spigolo del cubottaedro sarà la lunghezza dei segmenti che uniscono i punti medi che sono tra loro congruenti; quindi detto k lo spigolo del cubo lo spigolo dell'ottaedro sarà $\frac{\sqrt{2}\,k}{2}$ che è il lato dei quadrati e quindi l'area dei sei quadrati sarà $6 \cdot \frac{k^2}{2}$; inoltre $\frac{\sqrt{2}\,k}{2}$ sarà anche il lato dei triangoli equilateri quindi l'area degli 8 triangoli sarà $8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{k^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \cdot k^2$ allora

$$S = \left(3 + \sqrt{3}\right) \cdot k^2$$

approfondimento: il volume si ottiene sottraendo al volume del cubo il volume delle 8 piramidi triangolari rette che si ottengono nei vertici. Il volume di ciascuna piramide si otterrà con la formula $V_p = \frac{A_b \cdot h}{3}$; l'area di base sarà

$$A_b = \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} k^2$$

per determinare l'altezza calcoliamo l'apotema e il raggio della circonferenza circoscritta

$$a = \frac{k}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k}{2\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = k\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$$

l'altezza della piramide sarà

$$h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{\frac{k^2}{8} - \frac{3k^2}{72}} = \frac{k}{2\sqrt{3}}$$

e quindi

$$V_p = \frac{\sqrt{3}}{8} k^2 \cdot \frac{k}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{k^3}{48}$$

infine

$$V = V_c - 8V_p = k^3 - 8 \cdot \frac{k^3}{48} = \frac{5}{6} \cdot k^3$$

Soluzione quesito 4 - Per applicare la regola di De L'Hopital dovremmo considerare la derivata del numeratore $f(x) = senx$ che è la funzione $f'(x) = cosx$ ma per dimostrarlo dobbiamo scrivere i seguenti passaggi

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x_0+h)-senx_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\,sen\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)\,cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2sen\frac{h}{2}\,cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$$

per arrivare alla conclusione è necessario utilizzare il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$.

Soluzione quesito 7 – Siano x e y due numeri reali e indichiamo con S la somma cercata, si ha

$$\begin{cases} x^2+y^2=S \\ xy=k^2 \end{cases}$$

la prima equazione è una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{S}$; la seconda equazione è un'iperbole equilatera riferita agli asintoti di vertice $V=\left(\sqrt{k^2};\sqrt{k^2}\right)=(k,k)$. La circonferenza interseca l'iperbole se e solo se il suo raggio è ≥ della distanza d del vertice dell'iperbole dall'origine cioè se

$$\sqrt{2k^2}\le\sqrt{S}$$

$$S\ge 2k^2$$

Soluzione quesito 8

$$\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=(1-\text{sen}^2 x)^2=1+\text{sen}^4 x-2\text{sen}^2 x$$

$$1+\text{sen}^4 x-2\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x=k$$

$$2\text{sen}^4 x-2\text{sen}^2 x+1=k$$

$$2\text{sen}^2 x(\text{sen}^2 x-1)+1-k=0$$

$$2\text{sen}^2 x(-\cos^2 x)+1-k=0$$

$$-2\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x+(1-k)=0$$

moltiplicando per -2

$$4\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x-2(1-k)=0$$

Essendo

$$sen2x=2senxcosx\Longrightarrow 4\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x=sen^2 2x$$

$$sen^2 2x=2(1-k)$$

il primo membro è un numero positivo ≤ 1

$$0 \leq 2(1-k) \leq 1$$

$$\begin{cases} 2(1-k) \leq 1 \\ 2(1-k) \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2-2k \leq 1 \\ 2-2k \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2k \geq 1 \\ 2k \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{1}{2} \\ k \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq k \leq 1$$