Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 17 Aprile 2015
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 24 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I sei problemi numerati da 16 a 21, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 22, 23 e 24, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 10.

- Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 2** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. Un faro applicato al muro di un palazzo può assumere due diverse posizioni con inclinazione rispettivamente di $60°$ e $70°$ rispetto alla verticale. La distanza tra i punti in cui i fasci di luce proiettata nei due casi tocca il terreno è 2 metri. Calcolare a quale altezza dal suolo è fissato il faro.

(A) $2\dfrac{\tan 20° \cdot \tan 30°}{\tan 30° - \tan 20°}$.

(B) $2\cos 20°$.

(C) $2\dfrac{\tan 20°}{\tan 30° - \tan 20°}$.

(D) $2\tan 20°$.

(E) $(2 + \sin 60°) \cdot \cos 20°$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (A). Infatti, si indichi con x l'altezza richiesta e con y la distanza tra il muro ed il punto in cui il primo fascio di luce tocca terra. Allora $x = y\tan 30° = (y+2)\tan 20°$ quindi $x = 2\dfrac{\tan 20° \cdot \tan 30°}{\tan 30° - \tan 20°} \approx 1.96$ metri.

Problema 2. Una matita a base circolare di diametro 8 mm è lunga 17 cm compresa la punta. La punta si spezza e resta una mina anch'essa a base circolare di diametro 2 mm. Quanto era alta la parte di punta spezzata, sapendo che la superficie laterale della matita (esclusa la punta) è di 12π cm^2?

(A) 10 mm.

(B) $0,5$ cm.

(C) 5 cm.

(D) 5π mm.

(E) Non si può calcolare con i dati a disposizione.

Soluzione. La risposta esatta è contrassegnata con (B). Si indichi con x la lunghezza richiesta; la matita è costituita da un cilindro circolare retto sormontato da un cono. Dopo che la punta si è spezzata la parte rimanente è un tronco di cono con le basi di raggi 4 mm e 1 mm. Inoltre, sapendo che la superficie laterale del cilindro S_L vale 12π cm^2, dalla relazione $h = S_L/(2\pi r)$ si ricava che l'altezza della matita senza punta è 15 cm. Di conseguenza la punta integra era alta 2 cm. Per similitudine, x : 2 cm $= 0,1$ cm : $0,4$ cm, da cui $x = 0,5$ cm.

Problema 3. Sia k un parametro reale. Assegnata la famiglia di equazioni

$$4x^2 - k^2y^2 - kx + 2(k+1)^2y = 0,$$

determinare per quale valore di k si ottiene l'equazione di una circonferenza.

(A) $k = 0$.

[1] Dappertutto nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB); un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua i due segmenti che formano l'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); la lunghezza di un segmento è indicata con la sovralineatura sulle due lettere che individuano il segmento (ad esempio, $\overline{AB}$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x.

(B) $k = 2$.

(C) $k = -2$.

(D) $k = -4$.

(E) Nessuno.

Soluzione. L'affermazione vera è quella contrassegnata con (E).
L'equazione della circonferenza è del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Nel caso dell'equazione assegnata, una volta diviso per 4 ciascun coefficiente, si dovrebbero determinare i valori di k per i quali $-k^2 = 4$ cosa che è manifestamente impossibile. Più formalmente, posto

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -k/2 \\ 0 & -k^2 & (k+1)^2 \\ -k/2 & (k+1)^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -k^2 \end{pmatrix},$$

per ottenere un'ellisse dall'equazione assegnata deve risultare contestualmente

$$|A| \neq 0 \quad \text{e} \quad |B| > 0.$$

Dal momento che $|B| = -4k^2 \leq 0$ se ne conclude che per nessun valore di k l'equazione assegnata risulta essere un'ellisse e a maggior ragione una circonferenza.

Problema 4. Individuare il dominio X della funzione:

$$f(x) = \log_{1/3}\left[\ln\left(\ln^2 x - \sqrt{5}\ln x\right)\right].$$

(A) $X = \left]0, e^{(\sqrt{5}-3)/2}\right[$.

(B) $X = \left[0, e^{(\sqrt{5}-3)/2}\right[\bigcup \left]e^{(\sqrt{5}+3)/2}, +\infty\right[$.

(C) $X = \left]0, e^{(\sqrt{5}-3)/2}\right] \bigcup \left[e^{(\sqrt{5}+3)/2}, +\infty\right[$.

(D) $X = \left]0, e^{(\sqrt{5}-3)/2}\right[\bigcup \left]e^{(\sqrt{5}+3)/2}, +\infty\right[$.

(E) $X = \left]e^{(\sqrt{5}+3)/2}, +\infty\right[$.

Soluzione. Il dominio della funzione assegnata è quello contrassegnato da (D).
Ricordando che l'argomento della funzione logaritmo (con qualsiasi base) deve essere un reale positivo e che il logaritmo naturale risulta essere positivo solo per argomenti maggiori di 1, risulta:

$$\ln\left(\ln^2 x - \sqrt{5}\ln x\right) > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - \sqrt{5}\ln x > 1.$$

Posto, per ogni $x > 0$, $y = \ln x$, la disequazione $y^2 - \sqrt{5}x - 1 > 0$ ha per soluzione l'insieme:

$$Y = \left]-\infty, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right[\bigcup \left]\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty\right[.$$

Da Y, tenendo conto del fatto che la funzione esponenziale con base e è crescente e del fatto che $x > 0$ si ottiene

$$X = \left]0, e^{\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}}\right[\bigcup \left]e^{\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}}, +\infty\right[.$$

Problema 5. Se m è il minimo dell'insieme numerico X, quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) m è l'unico numero minore di ogni elemento di X.

(B) Se $x \leq m$ allora x non appartiene ad X.

(C) Ogni elemento di X è maggiore di m.

(D) m appartiene a X.

(E) Se $x > m$ allora x è un elemento di X.

Soluzione. L'affermazione vera è quella contrassegnata con (D).
Ciascuna delle altre affermazioni è in contrasto con la definizione di minimo di un insieme numerico: il minimo è un elemento di X ed è minore o uguale di ogni elemento di X.

Problema 6. Sia n un intero non minore di 4. Quante sono le permutazioni ottenibili con gli elementi dell'insieme $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ nelle quali il 2 precede il 4?

(A) $\dfrac{n(n-2)!}{2}$.

(B) $\dfrac{n!}{2}$.

(C) n^2.

(D) $\dbinom{n}{2}$.

(E) $\dfrac{n!}{3}$.

Soluzione. Il numero richiesto è quello contrassegnato con (B).
Ci sono $n!$ permutazioni in totale. Per ovvie considerazioni di simmetria (basta scambiare il ruolo del 2 con quello del 4) la metà di esse rispettano la condizione nelle quali il 2 precede il 4.

Problema 7. Individuare quale tra le seguenti successioni ha limite diverso da 0.

(A) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(B) $\ln(n+1) - \ln n$.

(C) $(1+n)^{1/n}$.

(D) $\dfrac{\sin n}{n}$.

(E) $\dfrac{\ln n}{n}$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
In primo luogo si noti che risulta $(1+n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(1+n)}{n}}$. Posto, per ogni $x > -1$, $f(x) = \ln(1+x)$ e $g(x) = x$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; l'applicazione della seconda regola di de l'Hopitâl fornisce:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (1+x)^{1/x} = 1.$$

In definitiva, tenendo conto che ogni successione estratta possiede lo stesso limite della funzione, $\lim_{n\to\infty} (1+n)^{1/n} = 1$.

Problema 8. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di termine generale $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Indicare quale delle seguenti uguaglianze è vera.

(A) $a_{n+1} = 2a_n + n(n+1)$.

(B) $a_{n+1} = a_n + n + 1$.

(C) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$.

(D) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n(n+1)}$.

(E) $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (B). Infatti

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)(n+2) - n(n+1)}{2} = n + 1,$$

e dunque $a_{n+1} = a_n + n + 1$.

Problema 9. In un triangolo rettangolo ABC retto in A si determinino gli angoli β e γ, rispettivamente, in B e C tali che $\cos(\beta - \gamma) = \sin\beta$.

(A) $\beta = 70°,\ \gamma = 20°$.

(B) $\beta = 60°,\ \gamma = 40°$.

(C) $\beta = 60°,\ \gamma = 30°$.

(D) $\beta = 45°,\ \gamma = 45°$.

(E) $\beta = 30°,\ \gamma = 60°$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C). Infatti, tenendo presente che $\gamma = 90° - \beta$ si ha $\cos(2\beta - 90°) = \sin\beta \iff \sin(2\beta) = \sin\beta$ e quindi $2\cos\beta = 1$. Pertanto, $\beta = 60°,\ \gamma = 30°$.

Problema 10. Durante un brindisi tra sei amici, ognuno incrocia il proprio calice una sola volta con tutti gli altri. Quanti tintinnii si ascoltano?

(A) 15.

(B) 36.

(C) 30.

(D) 18.

(E) 100.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (A). Infatti, la prima persona incrocia il suo calice con tutti gli altri, si ascoltano quindi 5 tintinnii, la seconda incrocia il calice con 4 amici (perché ha già brindato con la prima), la terza con 3, la quarta con 2 e la quinta ha già brindato con tutti meno uno. In definitiva il numero dei tintinnii è $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Problema 11. Sapendo che h è un numero reale tale che $\frac{1}{h} < h < -h$, disporre in ordine crescente i numeri $0, 1, h, h^2, -h^2$.

(A) $-h^2 < h < 0 < h^2 < 1$.

(B) $-h^2 < 0 < 1 < h < h^2$.

(C) $-h^2 < h < 0 < 1 < h^2$.

(D) $h < -h^2 < 0 < 1 < h^2$.

(E) $h < -h^2 < 0 < h^2 < 1$.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E). Infatti, il fatto che sia $h < -h$ implica che $h < 0$. Il fatto, invece, che $h > \frac{1}{h}$ comporta che $-1 < h < 0$.

Problema 12. Quanti sono i polinomi non nulli di secondo grado che si annullano per $x = 3$ e per $x = 4$ e i cui coefficienti sono numeri interi relativi tutti minori di 100?

(A) Infiniti.

(B) Nessuno.

(C) 8.

(D) 1.

(E) 22.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (E). Infatti, un tal polinomio dovrà essere della forma $K(x-3)(x-4) = Kx^2 - 7Kx + 12K$ con K intero relativo diverso da zero. Allora, per $K > 0$ deve essere $12K < 100$ ossia $0 < K \leq 8$. Invece, per $K < 0$ deve risultare $-7K < 100$ ossia $-14 < K < 0$. Dunque, in tutto, ci sono $8 + 14 = 22$ valori accettabili per K.

Problema 13. Nel piano euclideo reale siano dati una retta r, una parabola $\mathcal{P}$ ed una circonferenza $\mathcal{C}$. Sapendo che r è tangente sia a $\mathcal{P}$ che a $\mathcal{C}$, stabilire quale affermazione è vera.

(A) $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ sono tangenti.

(B) $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ hanno intersezione vuota.

(C) $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ hanno al più tre punti d'intersezione.

(D) $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ sono nello stesso semipiano rispetto a r.

(E) Nulla si può decidere sulla posizione reciproca di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$.

Soluzione. La risposta esatta è contrassegnata con (E).

Problema 14. Sia n un intero maggiore di 1. Quante sono le parole di lunghezza 5 (anche prive di senso compiuto) formate con le lettere di un alfabeto S di cardinalità n che non presentano la stessa lettera su posti consecutivi.

(A) $n^2(n-1)(n-2)^2$.

(B) $(n-1)^5$.

(C) $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

(D) $n(n-1)^4$.

(E) n^5.

Soluzione. Il numero richiesto è quello contrassegnato con (D).
La prima lettera, si dica l_1, può essere un qualsiasi elemento di S. La seconda lettera, si dica l_2, può essere un qualsiasi elemento di $S - \{l_1\}$. La terza lettera può essere un qualsiasi elemento di $S - \{l_2\}$ e così si può ragionare per la quarta e la quinta lettera. In definitiva, la risposta è la (D).

Problema 15. Quale tra le seguenti successioni ammette limite?

(A) $(-1)^n$.

(B) $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

(C) $(-1)^n \frac{n}{2n+1}$.

(D) $\frac{n!}{n^n}$.

(D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{n^2}{2n+3}\right)}$.

Soluzione. La risposta corretta è contrassegnata con (D). Infatti

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\right) < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \le \lim_n \frac{n!}{n^n} \le \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Per il teorema del confronto, allora la successione $\frac{n!}{n^n}$ è infinitesima.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Si calcoli il
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+\ln(1+x)]}{x+\sin x}.$$

Soluzione. Tenendo conto che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$
nell'intorno di 0 si può sostituire x a $\ln(1+x)$ e x a $\sin x$. Dopo di ciò:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+\ln(1+x)]}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{2}.$$

Problema 17. Sia n un intero non minore di 4. Determinare il numero delle permutazioni ottenibili con gli elementi dell'insieme $S_n=\{1,2,\ldots,n\}$ nelle quali 3 e 4 non sono adiacenti.

Soluzione. Si determina dapprima il numero n_{34} delle permutazioni nelle quali il 3 è seguito dal 4. Ce ne sono $(n-2)!$ che iniziano con il 3; altrettante ce ne sono che hanno il 3 in seconda posizione, e cosi via fino al 3 in posizione $(n-1)$-ima; quindi $n_{34}=(n-2)!(n-1)=(n-1)!$. Per simmetria (basta scambiare il ruolo del 3 con quello del 4) e con ovvio significato del simbolo, $n_{43}=(n-1)!$. Tenendo conto che in totale ci sono $n!$ permutazioni il numero richiesto è $n!-2(n-1)!=(n-1)!(n-2)$.

Problema 18. Considerato un insieme A costituito da 8 elementi, si determini il numero massimo di sottoinsiemi di A formati da tre elementi e tali che l'intersezione tra due qualsiasi di essi non sia un insieme di 2 elementi.

Soluzione. Si indichi con T una collezione di terne formate da elementi di A, avente la proprietà che $\forall(T_1,T_2)\in T\times T$, con $T_1\neq T_2$, si ha $|T_1\cap T_2|<2$. Si verifica facilmente che nessuno degli elementi di A può appartenere a più di 3 terne appartenenti a T perché se cosi fosse A dovrebbe contenere 9 elementi. Quindi, se per $\forall a\in A$ indichiamo con n_a il numero delle terne di T che contengono l'elemento a, si ha che:
$$3|T|=\sum_{a\in A}n_a\leq 3|A|.$$
Questo implica che le terne in T non possono essere più di 8. In conclusione si può osservare che è possibile scegliere un insieme con esattamente 8 siffatte terne. A tal proposito sia $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Allora l'insieme
$$T=\big\{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,4,8\},\{2,5,6\},\{3,6,8\},\{3,4,7\},\{5,7,8\}\big\}$$
possiede la proprietà desiderate. Pertanto, il numero desiderato è 8.

Problema 19. Si indichi con p il minimo numero primo somma di due cubi non nulli e con q il minimo numero primo differenza di due cubi. Si determini il valore di pq.

Soluzione. Siano p, q numeri primi tali che $p=x^3+y^3$, $q=z^3-t^3$, con x, y, z, t numeri naturali non nulli. Si ha $p=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, con $x+y\geq 2$, quindi $p=x+y$ e $x^2-xy+y^2=1$. Con $x=y=1$, si ha $p=2$ e $x^2-xy+y^2=1$ è verificata.
D'altra parte, da $q=(z-t)(z^2+zt+t^2)$, essendo $z^2+zt+t^2\geq 2$, si deduce $q=z^2+zt+t^2$ e $z-t=1$. Con $t=1$ e $z=2$, si ottiene $q=7$ e $z-t=1$ è verificata. Chiaramente 2 e 7 sono i più piccoli numeri primi verificanti le condizioni richieste e quindi $pq=2\cdot 7=14$.

Problema 20. Determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^3/3-x^2+1=0$.

Soluzione. Si consideri la funzione $f(x) = x^3/3 - x^2 + 1$. Risultando $f'(x) = x(x-2)$ se ne conclude che la funzione f' è positiva nell'insieme $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ e negativa nell'intervallo $]0, 2[$.

- per $x \in]-\infty, 0[$ la funzione f è crescente; risultando

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad f(0) = 1 > 0,$$

  il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse a sinistra di $x = 0$ e pertanto l'equazione assegnata ha una soluzione minore di 0.

- per $x \in]2, +\infty[$ la funzione f è crescente; risultando

$$f(2) = \frac{8}{3} - 4 + 1 < 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse a destra di $x = 2$ e pertanto l'equazione assegnata ha una soluzione maggiore di 2.

- per $x \in]0, 2[$ la funzione f è decrescente; risultando

$$f(0) > 0, \quad f(2) < 0,$$

  se ne deduce un'ulteriore intersezione del grafico di f con l'asse della ascisse $]0, 2[$ e pertanto l'equazione considerata possiede una terza soluzione nell'intervallo $]0, 2[$.

La risposta è, in definitiva, 3.

Problema 21. Nello spazio euclideo reale sono date due sfere S_1 e S_2 tangenti esternamente e di raggio, rispettivamente $r_1 = 4\sqrt{3}$ e $r_2 = 3\sqrt{3}$. Sia π un piano tangente ad entrambe le sfere nei punti P e Q rispettivamente. Determinare la lunghezza del segmento PQ.

Soluzione. Per il teorema delle tre perpendicolari si può affermare che la costruzione riportata nella Figura 1 giace nel piano perpendicolare al piano π passante per il segmento PQ.

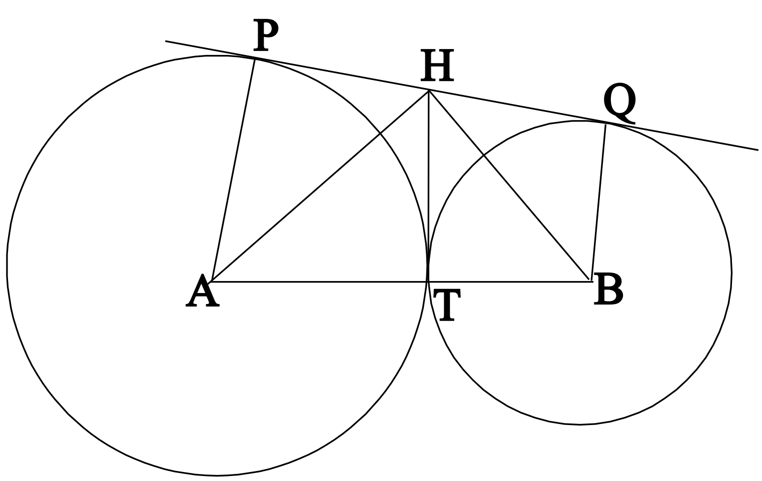

Figura 1: Ad illustrazione del Problema 21.

Dopo di ciò, il teorema delle due tangenti ad una circonferenza fornisce

$$\overline{PH} = \overline{TH}, P\widehat{H}A = T\widehat{H}A \qquad \text{e} \qquad \overline{QH} = \overline{TH}, Q\widehat{H}B = T\widehat{H}B,$$

da cui si ricava che $\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{TH}$ e $A\widehat{H}B = 90°$. Infine, per il secondo teorema di Euclide $\overline{TH} = \sqrt{r_1 r_2} = 6$, e quindi $\overline{PQ} = 2 \cdot 6 = 12$.

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 22. In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, determinare le equazioni delle rette r ed s passanti per l'origine sulle quali l'ellisse di equazione $3x^2 + 4y^2 = 12$ stacca corde di lunghezza $\sqrt{15}$. Successivamente, detti A, B, C e D i punti d'intersezione dell'ellisse con le rette r ed s, determinare le equazioni delle rette r_A, r_B, r_C e r_D tangenti all'ellisse in questi punti. Si dimostri che l'area S del quadrilatero determinato da tali tangenti vale 16.

Soluzione. I punti appartenenti all'intersezione dell'ellisse con una retta generica passante per l'origine O del sistema di riferimento si ottengono risolvendo, con $m \in \mathbb{R}$, il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = mx \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{12}{3+4m^2}} \\ y = \pm m\sqrt{\dfrac{12}{3+4m^2}}. \end{cases}$$

Si osservi, comunque, che punti corrispondenti alle soluzioni del precedente sistema per stare sulla stessa retta devono avere, ascisse e ordinate opposte; i valori di m si determinano imponendo che essi distano $\sqrt{15}$:

$$\sqrt{\left(2\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}\right)^2 + \left(2m\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}\right)^2} = \sqrt{15} \iff \frac{48(1+m^2)}{3+4m^2} = 15$$
$$\iff m = \pm\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$r: \quad y = \frac{1}{2}x, \qquad s: \quad y = -\frac{1}{2}x$$

e

$$A = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad B = \left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad C = \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad D = \left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ricordato che la retta tangente ad un'ellisse di equazione $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ha equazione

$$\frac{\alpha x_0}{\gamma}x + \frac{\beta y_0}{\gamma}y - 1 = 0,$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
r_A: &\quad \frac{3\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\sqrt{3}}{12}y - 1 = 0 &&\iff r_A: \quad 3x + 2y - 4\sqrt{3} = 0,\\
r_B: &\quad -\frac{3\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\sqrt{3}}{12}y - 1 = 0 &&\iff r_B: \quad -3x + 2y - 4\sqrt{3} = 0,\\
r_C: &\quad -\frac{3\sqrt{3}}{12}x - \frac{2\sqrt{3}}{12}y - 1 = 0 &&\iff r_C: \quad -3x - 2y - 4\sqrt{3} = 0,\\
r_D: &\quad \frac{3\sqrt{3}}{12}x - \frac{2\sqrt{3}}{12}y - 1 = 0 &&\iff r_D: \quad 3x - 2y - 4\sqrt{3} = 0.
\end{aligned}$$

Determiniamo ora i punti P, Q, R e S intersezione, rispettivamente, delle rette r_A e r_B, r_B e r_C, r_C e r_D e r_D e r_A:

$$P = \left(0, 2\sqrt{3}\right), \quad Q = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right), \quad R = \left(0, -2\sqrt{3}\right), \quad S = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right).$$

Se ne deduce che il quadrilatero formato dalle tangenti alle ellissi nei punti A, B, C e D è un rombo aventi diagonali di lunghezza $4\sqrt{3}$ e $8\sqrt{3}/3$; l'area del quadrilatero $PQRS$, pertanto, vale:

$$\text{Area}(PQRS) = \frac{4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3}/3}{2} = 16.$$

Problema 23. Si risponda alle seguenti richieste.
(a) Sia f una funzione derivabile in tutto $\mathbb{R}$; si supponga che esista un unico punto x_1 tale che $f'(x_1) = 0$ e che risulti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Sapendo che per una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato I vale il teorema dei valori intermedi (in altri termini l'immagine dell'intervallo I è un intervallo J), dimostrare che x_1 non è né punto di minimo relativo né punto di massimo relativo per la funzione f.
(b) Siano inoltre g e h due funzioni derivabili nell'intervallo $(a, +\infty)$, tali che:

$$\text{(i)} \quad \forall x > a,\ g'(x) \geq h'(x), \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to+\infty} [g(x) - h(x)] = 0. \tag{1}$$

Dimostrare che $g(x) \leq h(x)$ nell'intervallo $(a, +\infty)$.

Soluzione. (a) Per assurdo si supponga che x_1 sia un punto di minimo relativo per f; esisterà un $x_2 < x_1$ per il quale $f(x_2) > f(x_1)$ (se così non fosse esisterebbe un intervallo nel quale la funzione sarebbe costante). Sia $d > 0$ sufficientemente grande per avere

$$x_1 - d < x_2 \qquad \text{e} \qquad f(x_1 - d) < f(x_1) < f(x_2),$$

la seconda essendo assicurata dalla condizione $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Per il teorema dei valori intermedi l'immagine dell'intervallo $I = [x_1 - d, x_2]$ è un intervallo al quale appartiene $f(x_1)$; ne scaturisce che esiste un $x_0 \in I$ per il quale $f(x_0) = f(x_1)$. In definitiva, il Teorema di Rolle assicura l'annullarsi di f' in almeno un punto interno all'intervallo (x_0, x_1). Ciò contraddice l'ipotesi che x_1 è l'unico punto nel quale si annulla la derivata prima di f. Allo stesso modo si ragiona se si suppone che x_1 sia un punto di massimo relativo per f.
(b) Si ponga, per ogni $x > a$, $\varphi(x) = g(x) - h(x)$. Dalla condizione (i) della (1) si ricava che $\varphi'(x) = g'(x) - h'(x) \geq 0$ da cui discende che $\varphi(x)$ è crescente per $x > a$. D'altra parte la condizione (ii) della (1) comporta che, per $x > a$, $\varphi(x) \leq 0$ e quindi $g(x) \leq h(x)$.

Problema 24. Sia n un numero intero, S un insieme di cardinalità n e A un sottoinsieme di S avente cardinalità $k \leq n$. Si determini il numero dei sottoinsiemi B di S nei seguenti casi:

a) $B \subset A$;

b) $B \supset A$;

c) $A \cap B = \emptyset$;

d) $A \cap B \neq \emptyset$.

Soluzione. a) Ci sono 2^k sottoinsiemi di S che contengono solo elementi di A; da questi bisogna escludere A stesso che non soddisfa la condizione. Il numero richiesto è $2^k - 1$ (2 punti).
b) Un sottoinsieme B di S per soddisfare la condizione deve essere del tipo $A = B \cup C$ con $C \subseteq S - A$ non vuoto. D'altra parte ci sono $n - k$ elementi di S che non sono elementi di A e $2^{n-k} - 1$ sottoinsiemi del tipo C; il numero richiesto è $2^{n-k} - 1$ (2 punti).
c) Tutti i sottoinsiemi C definiti nel punto b) soddisfano la condizione. Ad essi bisogna aggiungere l'insieme vuoto. Il numero richiesto è 2^{n-k} (3 punti).
d) Se $A \cap B \neq \emptyset$ allora $B = D \cap C$ con $D \subseteq A$ non vuoto e $C \subseteq S - A$. Ci sono 2^k sottoinsiemi di S che contengono solo elementi di A; da questi bisogna escludere l'insieme vuoto che non soddisfa la condizione; l'insieme D può essere scelto in $2^k - 1$ modi. Per per quanto determinato nei punti b) e c) l'insieme C può essere scelto in 2^{n-k} modi. Il numero richiesto è $(2^k - 1)2^{n-k} = 2^n - 2^{n-k}$ (3 punti).