Certamen Nazionale di Matematica “Renato Caccioppoli”

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Sezione napoletana della Mathesis “Aldo Morelli”
Liceo Scientifico Statale “Giuseppe Mercalli”

NAPOLI, 8 Aprile 2016
LSS “Giuseppe Mercalli”

Tempo a disposizione: 4 ore

AVVERTENZE

- Non sfogliare questo fascicoletto fino a quando l’insegnante non ti dice di farlo.
- Non è ammesso l’uso di CALCOLATRICI PROGRAMMABILI, libri di testo e tavole numeriche.
- Non è consentito comunicare con altri partecipanti o con l’esterno; IN PARTICOLARE, È PROIBITO L’USO DI TELEFONI CELLULARI.
- La prova consiste di 24 problemi divisi in 3 sezioni.
  Per i quindici problemi numerati da 1 a 15 che costituiscono la “**Sezione A: problemi a risposta chiusa**”, sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere A, B, C, D, E. Una sola di queste risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta dovrà essere scritta (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  I sei problemi numerati da 16 a 21, che costituiscono la “**Sezione B: problemi a risposta aperta**”, richiedono una sola risposta che va indicata (nella posizione corrispondente) nella griglia riportata nella pagina allegata a questo fascicolo. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta errata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
  Infine, i problemi 22, 23 e 24, che costituiscono la “**Sezione C: problemi con dimostrazione”**, richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e utilizzando soltanto i fogli di questo fascicoletto. La dimostrazione fornita a ciascuno di tali problemi sarà valutata con un punteggio da 0 a 10.

- Nella busta grande contenente questo fascicoletto troverai anche una busta piccola con un cartoncino da compilare con i tuoi dati personali e da reinserire poi nella busta piccola. Al momento della consegna del fascicoletto compilato con le tue risposte, dovrai chiudere la busta piccola in presenza di un docente: entrambi (fascicoletto e busta piccola) saranno reinseriti nella busta grande che a quel punto sarà chiusa in via definitiva.

AVVERTENZA IMPORTANTE: Non lasciare segni identificativi su questi fogli.
Quando l’insegnante darà il via, potrai cominciare a lavorare. **Leggi attentamente la nota a pié di pagina 2** e ricorda che hai 4 ore di tempo. Buon lavoro!

SEZIONE A : PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA[1]

Problema 1. Quale è il minimo intero n per cui un triangolo equilatero di area a si spezza in n triangoli equilateri ciascuno di area a/n?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 6.

(E) 16.

Soluzione. La risposta corretta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, detta l la lunghezza del lato del triangolo equilatero T di area a, sia l_n la lunghezza del lato di uno degli n triangoli equilateri T_n di area a/n in cui T si spezza. Si ha:

$$a = \text{area}(T) = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = n\, \text{area}(T_n) = n\, l_n^2 \frac{\sqrt{3}}{4},$$

quindi $n = (l/l_n)^2$ è un quadrato (maggiore di 1) cosicché, la richiesta è soddisfatta per $n = 4$.

Problema 2. Siano a, b e c tre interi consecutivi costituenti una terna pitagorica. Se a è dispari, quale delle seguenti affermazioni per b e c è vera?

(A) b e c sono entrambi dispari.

(B) b e c sono entrambi pari.

(C) Uno dei due è pari e l'altro è dispari.

(D) Uno è doppio dell'altro.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta esatta è contrassegnata con (C).
Si ricordi, in primo luogo, che la parità si conserva con l'elevamento al quadrato; inoltre la somma (e la differenza) di due interi è pari se essi hanno la stessa parità, è dispari nel caso contrario. Quindi a^2 è dispari per ipotesi e se a è l'ipotenusa, dalla relazione $a^2 = b^2 + c^2$ ne scaturisce che gli addendi del secondo membro devono essere uno pari e uno dispari. Se invece a è un cateto e, per fissare le idee, $b > c$, dalla relazione $a^2 = b^2 - c^2$ si ricava la medesima conclusione.

Problema 3. Se a e b sono numeri reali, quale delle seguenti relazioni è vera?

(A) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

(B) $a^2 + b^2 = 2ab$.

(C) $a^2 + b^2 \leq 2ab$.

(D) $a^2 + b^2 > 2ab$.

[1] Dappertutto nel presente questionario sono utilizzate le seguenti convenzioni. Un punto è indicato con una lettera maiuscola (ad esempio, A); un segmento è indicato con la coppia di lettere che rappresentano gli estremi del segmento (ad esempio, AB); un angolo è indicato dalla terna di lettere, con accento circonflesso sulla seconda, che individua i due segmenti che formano l'angolo (ad esempio, $A\widehat{B}C$); la lunghezza di un segmento è indicata con la sovralineatura sulle due lettere che individuano il segmento (ad esempio, $\overline{AB}$); un poligono è indicato con la sequenza delle lettere dei suoi vertici (ad esempio, il triangolo ABC); $\ln x$ rappresenta il logaritmo naturale del numero reale positivo x; $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri interi: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. L'affermazione vera è quella contrassegnata con (A).
Difatti $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Problema 4. Sia assegnato un cubo (ottenuto da una piccola trave di legno) di lato a, con a numero reale. Sul vertice F c'è una formica che vuole raggiungere il vertice Z dove c'è un granello di

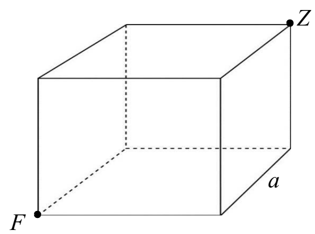

Figura 1: Ad illustrazione del Problema 4.

zucchero. Quale è il percorso minimo per la formica?

(A) $3a$.

(B) $a\left(\sqrt{2}+1\right)$.

(C) $a\sqrt{5}$.

(D) $2a$.

(E) $a\sqrt{3}$.

Soluzione. La risposta esatta è contrassegnata con (C).
Difatti, con riferimento alla Figura 2, partendo dal vertice F la formica dovrà camminare necessariamente su due facce del cubo per raggiungere il vertice Z; in tal modo essa percorrerà due

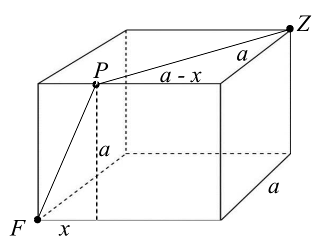

Figura 2: Ad illustrazione della soluzione del Problema 4.

segmenti FP e PZ ciascuno dei quali è l'ipotenusa di triangoli rettangoli aventi come coppie di cateti (a, x) e $(a, a-x)$, rispettivamente.
In definitiva, con $0 \leq x \leq a$, il percorso effettuato dalla formica sarà:

$$d(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (a-x)^2}.$$

Risultando, $\forall x \in (0, a)$,

$$\begin{aligned} d'(x) > 0 \Leftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{a^2+(a-x)^2}} > 0 \\ & \Leftrightarrow x^2[a^2 + (a-x)^2] > (a-x)^2(a^2+x^2) \\ & \Leftrightarrow a(a-2x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

la funzione $d(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo $(a/2, a)$, strettamente decrescente nell'intervallo $(0, a/2)$ e $x = a/2$ risulta essere il suo unico punto di minimo relativo; in tale punto essa assume il valore:

$$d\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{5}.$$

Infine, $d(0) = d(a) = a(1 + \sqrt{2}) > a\sqrt{5}$ comporta che $x = a/2$ è il punto di minimo assoluto di $d(x)$.

Problema 5. Assegnati due numeri reali x_0 e a, si consideri la successione definita iterativamente da:

$$x_n = ax_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(A) È infinitesima se $|a| < 1$.

(B) È costantemente uguale a x_0 se $a = 1$.

(C) È costantemente uguale a 0 se $x_0 = 0$.

(D) Diverge positivamente se $a > 1$ e $x_0 > 0$.

(E) È costantemente uguale a x_0 se $a = -1$.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (E).
In primo luogo, dalla (1) si deduce la forma esplicita della successione assegnata:

$$x_n = a^n x_0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Infatti per $n = 1$, $x_1 = ax_0$,; inoltre supposto vero che per $n \geq 2$ risulta $x_{n-1} = a^{n-1}x_0$, allora $x_n = ax_{n-1} = aa^{n-1}x_0 = a^n x_0$. Si analizzano ora le varie eventualità proposte utilizzando la formula (2).
La successione è infinitesima se $|a| < 1$ in quanto a^n è infinitesima, e la (A) è vera. Se $a = 1$, risulta $x_n = x_0$ per ogni n intero e quindi la (B) è vera. Se $x_0 = 0$, risulta $x_n = a^n \cdot 0 = 0$ per qualunque intero n; quindi la (C) è vera. Se $x_0 > 0$ e $a > 1$ la successione diverge positivamente in quanto a^n diverge positivamente, e la (D) è vera. La (E) è falsa in quanto la successione oscilla sui valori $-x_0$ e x_0.

Problema 6. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(B) Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e $b_n = a_n - \frac{1}{n}$, allora $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.

(C) Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, allora $\{a_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.

(D) Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora è convergente.

(E) Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è non limitata, allora è divergente.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (B).
Infatti,

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow b_n = a_n - \frac{1}{n} < a_{n+1} - \frac{1}{n+1} = b_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

dunque $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.
La (A) è falsa in quanto la successione potrebbe essere costante oppure limitata e quindi in entrambi i casi convergente. La (C) è falsa in quanto se due termini consecutivi della successione sono uguali tali sono anche i loro quadrati. La (D) e la (E) sono false in quanto in entrambi i casi la successione potrebbe essere oscillante.

Problema 7. Quante sono le permutazioni semplici ottenibili con gli elementi dell'insieme $S_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aventi i numeri 3 e 4 non consecutivi?

(A) 696.

(B) 720.

(C) 480.

(D) 600.

(E) 672.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (C).
Si determina dapprima il numero $n_{3,4}$ delle permutazioni nelle quali il 3 è seguito dal 4: ce ne sono $4!$ che iniziano con il 3; altrettante ce ne sono che hanno il 3 in seconda posizione e così via fino a quelle che hanno il 3 in quinta posizione. Quindi $n_{3,4} = 5 \cdot 4! = 5!$. Per simmetria risulta che $n_{4,3} = 5!$ (basta scambiare il ruolo del 3 con quello del 4). In definitiva il numero richiesto vale $6! - 2 \cdot 5! = 720 - 240 = 480$.

Problema 8. Tre dadi perfettamente bilanciati sono lanciati uno di seguito all'altro. Qual è la probabilità che solo uno di essi presenti il punteggio 1?

(A) $\frac{25}{216}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{25}{72}$.

(D) $\frac{5}{72}$.

(E) Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, per l'indipendenza dei lanci successivi, la probabilità p richiesta vale:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 25}{216} = \frac{25}{72}.$$

Problema 9. In una pagina di un vecchio manoscritto matematico si parla di due numeri positivi x e y. Il testo risulta rovinato e non è più leggibile; si riesce comunque a capire che una e una sola delle affermazioni seguenti deve essere vera. Quale?

(A) $x > y$.

(B) $x > 2y$.

(C) $x > y^2$.

(D) $x^2 > y^2$.

(E) $x^2 > 2y^2$.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (C).
Infatti, se solo una delle risposte può essere vera sarà necessario escludere ogni risposta che ne implichi almeno un'altra. Ora, se x e y sono numeri positivi, le affermazioni (A) e (D) sono equivalenti. Inoltre, dal momento che il raddoppio di un numero positivo fa ottenere un numero maggiore, si ricava che la (B) implica la (A) e la (E) implica la (D).

Problema 10. Si vuole riempire una tabella con quattro righe e quattro colonne con elementi uguali a 0 oppure uguali a 1; in aggiunta c'è il vincolo che nessuna somma lungo una riga o lungo una colonna possa superare 1. In quanti modi si può realizzare una tale tabella?

(A) 65.

(B) 69.

(C) 93.

(D) 196.

(E) 209.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (E).
Si tratta di contare i possibili riempimenti della tabella aventi esattamente k elementi uguali a 1, con $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, in maniera da rispettare il vincolo assegnato. Si osservi che, applicando il principio fondamentale del calcolo combinatorio, il numero dei riempimenti aventi k elementi uguali a 1 è dato da:

$$\binom{4}{k} \cdot \binom{4}{k} \cdot k!.$$

Infatti, il primo fattore rappresenta il numero di modi con i quali si possono scegliere k righe diverse,[2] il secondo fattore rappresenta il numero di modi con i quali si possono scegliere k colonne diverse e il terzo fattore rappresenta il numero dei modi di collocare i k elementi uguali a 1 rispettando la scelta delle righe, delle colonne e il vincolo assegnato.
Dopo di ciò, il risultato richiesto è dato da:

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \cdot \binom{4}{k} \cdot k! = 1 + 16 + 72 + 96 + 24 = 209.$$

Problema 11. Quale tra le seguenti funzioni è non monotona nel suo dominio?

(A) $f(x) = \ln|x + 1|$.

(B) $g(x) = \left(\frac{15}{4}\right)^{x^3}$.

(C) $h(x) = \arctan(x^3 + 1)$.

(D) $k(x) = x^5 + x^3 - 1$.

(E) $l(x) = e^{-x} + 5$.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (A).
Infatti, la funzione $f(x)$ eredita l'andamento di monotonia della funzione valore assoluto: a sinistra di -1 è strettamente decrescente, mentre a destra è strettamente crescente. Le funzioni $g(x)$ e $h(x)$ sono crescenti in quanto composte con funzioni elementari crescenti. La funzione $k(x)$ è la somma di funzioni crescenti e di una costante e quindi è crescente. La funzione $l(x)$ è somma di una funzioni decrecente e di una costante e quindi è decrescente.

Problema 12. Una barca ha una vela a forma di triangolo rettangolo alta $(\sqrt{3} + 3)/2$ m. Avvolgendola dal basso fino a metà altezza resta visibile uno stemma circolare con raggio 25 cm inscritto nella restante parte della vela. Determinare l'angolo al vertice della vela.

(A) 15 gradi.

[2] In altri termini si devono contare i sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme con cardinalità 4.

(B) 30 gradi.

(C) 45 gradi.

(D) 60 gradi.

(E) Non si può determinare con i dati del problema.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (B).
Si indichi con h l'altezza della vela e con r il raggio dello stemma e si faccia riferimento alla Figura 3. Lo stemma risulta iscritto in un triangolo rettangolo di altezza $h/2$; i punti di tangenza

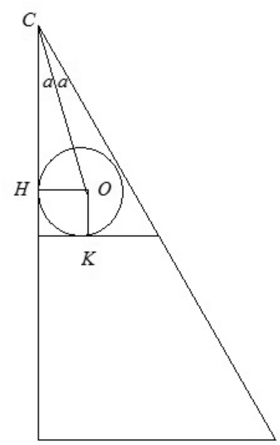

Figura 3: Ad illustrazione del Problema 12.

H e K sui cateti di tale triangolo sono tali che il triangolo rettangolo HOC ha cateti che misurano r e $h/2 - r$ ed angolo al vertice α tale che $\tan\alpha = \frac{r}{h/2-r} = \frac{2r}{h-2r}$. Dal momento che le bisettrici di un triangolo in cui è iscritta una circonferenza passano per il centro di quest'ultima, si ricava che l'angolo in C vale 2α. Pertanto, con i valori assegnati di h e r, si ha:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4r(h-2r)}{h^2-4hr+8r^2} = \frac{1}{2},$$

da cui $2\alpha = 30$ gradi.

Problema 13. Se si accetta come vera l'affermazione "Se fai come ti suggerisco, andrà tutto bene", tra le seguenti affermazioni solo una è vera. Quale?

(A) Se non farai come ti dico, non potrà che andar male.

(B) Purtroppo non è andata bene, è evidente che non hai fatto come ti avevo suggerito.

(C) Se avessi seguito il mio consiglio, forse non sarebbe andata come speravi, ma nemmeno troppo male.

(D) È andata bene e me ne compiaccio, perché significa che hai fatto esattamente come ti avevo indicato.

(E) Se non farai come ti dico, non saprai se andrà bene o male.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (B).
Infatti, essa è la negazione della affermazione assegnata: il negato della tesi implica il negato dell'ipotesi.

Problema 14. Una telecamera posta nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrici guarda un ciclista percorrere un arco di parabola AB sotto un angolo retto. Se le tangenti in A e B sono le bisettrici dei quadranti e gli estremi dell'arco sono equidistanti dalla telecamera, quale tra le seguenti potrebbe essere l'equazione della parabola in questione?

(A) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

(B) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.

(C) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

(D) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

(E) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (D).
Il fatto che le bisettrici dei quadranti siano tangenti alla parabola, chiamiamola Γ, nei punti A e B unitamente al fatto che $\overline{OB} = \overline{OA}$ comporta che $y_B = y_A$ e che l'asse verticale corrisponde all'asse di simmetria della parabola. Quindi Γ dovrà avere equazione $y = ax^2 + c$. Per fissare le idee, si supponga che il punto A sia quello che appartiene alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (che ha coefficiente angolare uguale a 1). Dall'equazione di Γ si ricava che il coefficiente angolare della retta tangente in A vale $2ax_A$. Ne discende che $2ax_A = 1 \Leftrightarrow ax_A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_A = \frac{1}{2a}$. Inoltre sapendo che $y_A = x_A$ l'equazione di Γ fornisce la seguente: $x_A = ax_Ax_A + c \Leftrightarrow x_A = 2c$. Ne discende che $ac = \frac{1}{4}$ e solo la risposta contrassegnata con (D) rispetta il requisito individuato.

Problema 15. Individuare l'unica affermazione errata tra le seguenti.

(A) Una funzione derivabile in un punto è ivi continua.

(B) Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è invertibile.

(C) Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori tra il suo minimo e il suo massimo.

(D) Una funzione è costante in un intervallo limitato se in esso la sua derivata si annulla.

(E) Una funzione costante in un intervallo chiuso e limitato non è iniettiva.

Soluzione. La risposta esatta è quella contrassegnata con (B).
Infatti, ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[-1, 1]$ è continua ma non è invertibile.

SEZIONE B : PROBLEMI A RISPOSTA APERTA

Problema 16. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}(x+\cos x)^{\frac{4}{\sin x}}.$$

Soluzione. Si osservi, in primo luogo che nell'intorno di 0 si può sostituire $\cos x$ con 1 e $\sin x$ con x. Dopo di ciò, con la sostituzione $y = 1/x$, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(x+\cos x)^{\frac{4}{\sin x}} &= \lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\frac{4}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y} \\ &= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^4 = \left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^4 \\ &= e^4.\end{aligned}$$

Problema 17. Sia a un numero reale e sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non negativa e tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$. Determinare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Soluzione. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Problema 18. Determinare il numero delle parole (anche prive di senso compiuto) palindrome (le parole che si leggono allo stesso modo da sinistra a destra e da destra a sinistra) di lunghezza 11 formate con le ventuno lettere dell'alfabeto italiano.

Soluzione. Fissando le prime cinque lettere della parola, si potranno formare 21 parole palindrome di lunghezza 11: la sesta lettera potrà essere una qualsiasi lettera dell'alfabeto italiano mentre la settima lettera dovrà coincidere con la quinta, l'ottava dovrà coincidere con la quarta, la nona dovrà coincidere con la terza, la decima dovrà coincidere con la seconda, e l'undicesima dovrà coincidere con la prima. In definitiva, scegliendo le prime cinque lettere in tutti i modi possibili, il numero richiesto è $21^5 \cdot 21 = 21^6$.

Problema 19. In un triangolo rettangolo la misura del cateto c_1 è indicata con x e dipende dal tempo t, mentre l'ipotenusa i misura costantemente 3. Indicato con θ l'angolo opposto a c_1 si sa che

$$\theta \equiv \theta(t) = \theta_0 + \frac{\pi}{24}t, \tag{3}$$

nella quale θ_0 è un numero reale assegnato. Si determini il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $x(t)$ quando θ raggiunge il valore di $\pi/6$.

Soluzione. Dal fatto che $x \equiv x(t) = 3\sin[\theta(t)]$ e dalla relazione (3) ne discende che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= 3\frac{d}{dt}\sin[\theta(t)] = 3\cos[\theta(t)]\frac{d}{dt}\theta(t) \\ &= 3\cos[\theta(t)]\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}\cos[\theta(t)].\end{aligned}$$

Da quest'ultima, si ottiene:

$$\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{\theta(t)=\pi/6} = \frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{16}.$$

Problema 20. Si determini il dominio della funzione:

$$f(x) = \log_2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-4}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}\right].$$

Soluzione. Tenendo conto del fatto che l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo e quello della radice quadrata deve essere non negativo, il dominio D della funzione assegnata è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-4}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x^2-4} < x-3 \\ x \leq -2 \end{cases} \cup \begin{cases} \sqrt{x^2-4} < x-3 \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Per ottenere la formulazione equivalente si è fatto uso del fatto che la funzione esponenziale con base compresa tra 0 e 1 è una funzione decrescente; inoltre, in tale formulazione equivalente il primo sistema è palesemente impossibile in quanto un numero negativo non può essere più grande del risultato di una radice quadrata. In definitiva, l'insieme D si ottiene allora risolvendo la disequazione

$$(x-3)^2 > x^2-4,$$

con la condizione che $x > 3$. Se ne conclude che $D = \emptyset$.

Problema 21. Nella circonferenza γ è inscritto un quadrato di area $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$. Qual è la lunghezza l del lato di un pentagono regolare convesso inscritto nella circonferenza?

Soluzione. Si faccia riferimento alla Figura 4. Si traccino le diagonali del quadrato Q inscritto

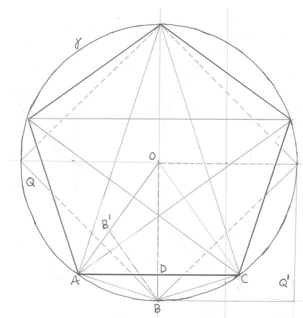

Figura 4: Ad illustrazione del Problema 21.

in γ; si vede subito che l'area del quadrato Q' che ha per lato metà diagonale di Q (uguale al raggio r di γ) e per diagonale il lato di Q è la metà dell'area di Q. Dunque $2r^2 = a$ e quindi $r = \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

Ora si può determinare l. Un modo rapido è ricordare il teorema: *il lato di un pentagono regolare convesso inscritto in una circonferenza è uguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono uguali, rispettivamente, al raggio r della circonferenza e alla sezione aurea di r.* Perché allora si ha (teorema di Pitagora):

$$l^2 = r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}r^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\frac{a}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{10} = 1.$$

Se non si vuol far uso del citato teorema ci si può ricordare che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio: $l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$. Noto l_{10}, non è poi difficile ottenere l. Un lato AC del pentagono regolare è la corda che sottende l'arco di γ determinato da due lati AB, BC consecutivi del decagono regolare inscritto in γ; il raggio OB è perpendicolare ad AC e incontra AC nel suo punto medio D; considerando i triangoli rettangoli CDB e CDO (rettangoli in D), via teorema di Pitagora, si trova DC in funzione di l_{10} e quindi di r; ma DC è la metà di AC.

SEZIONE C : PROBLEMI CON DIMOSTRAZIONE

Problema 22. Siano a e b due numeri reali e sia assegnata la funzione

$$f(x) := \begin{cases} |x|^b \cos^2(1/x), & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^a \sin^2 x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Dimostrare che la funzione f è continua in $-1 < x < 1$ per ogni coppia di valori a e b per i quali $a > -2$ e $b > 0$.

Soluzione. La funzione f è continua per $-1 < x < 0$ e per $0 < x < 1$ in quanto composta di funzioni elementari. Bisogna allora imporre la continuità in $x = 0$ e perciò, posto

$$l_1 := \lim_{x \to 0^-} |x|^b \cos^2(1/x) \qquad \text{e} \qquad l_2 := \lim_{x \to 0^+} x^a \sin^2 x.$$

deve risultare $l_1 = l_2 = 0$.
Relativamente a l_2 si osservi che:

(i) se $a < -2$ ossia se $a = -(2 + \delta)$ con $\delta > 0$, allora

$$l_2 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\delta} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\delta} = +\infty;$$

(ii) se $a = -2$, allora $l_2 = 1$;

(iii) se $a > -2 \iff a + 2 > 0$, allora

$$l_2 = \lim_{x \to 0^+} x^{a+2} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} x^{a+2} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0.$$

Relativamente a l_1 si osservi che:

(iv) se $b = -\gamma$ con $\gamma > 0$, allora $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos^2(1/x)}{|x|^\gamma}$ non esiste;

(v) se $b = 0$ allora $\lim_{x \to 0^-} \cos^2(1/x)$ non esiste;

(vi) se $b > 0$, allora $l_1 = 0$.

Dalle precedenti relazioni (i) $\div$ (vi) segue l'asserto.

Problema 23. Dato un triangolo ABC, siano E, F rispettivamente i punti medi di AC e AB e D un punto di BC. Supposto che

1. P sia un punto su BF tale che DP risulti essere parallelo a CF,
2. Q sia un punto su CE tale che DQ risulti essere parallelo a BE,
3. PQ intersechi BE e CF in R e S rispettivamente,

dimostrare che $PQ = 3RS$.

Soluzione. Con riferimento alla Figura 5, sia G l'intersezione di BE e CF. G è per costruzione il baricentro del triangolo ABC, quindi $CF = 3FG$ e $BE = 3GE$. Siano T e V, rispettivamente, le intersezioni di PD con BE e CF con DQ. Allora per il parallelismo di FC e PD i triangoli BFC e BPD sono simili e quindi $PD = 3PT$; per il parallelismo di BE e DQ i triangoli PDQ e PTR sono simili e quindi $PQ = 3PR$. Analogamente si dimostra che $DQ = 3QV$ (dai triangoli BEC e DQC) e $PQ = 3QS$ (dai triangoli PDQ e QSV).
Quindi $PQ = PR + RS + SQ = \frac{2}{3}PQ + RS$ da cui $RS = \frac{1}{3}PQ$ come si doveva dimostrare.

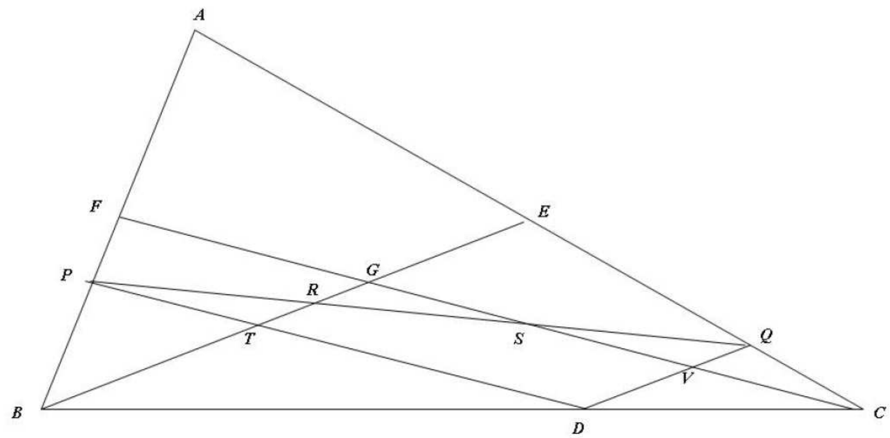

Figura 5: Ad illustrazione del Problema 23.

Problema 24. Si dimostri che esiste un unico intero positivo n per il quale il numero

$$2^{2011} + 2^{2008} + 2^n$$

risulti essere il quadrato di un intero.

Soluzione. È abbastanza semplice stabilire che se $n = 2012$ allora

$$2^{2011} + 2^{2008} + 2^{2012} = 2^{2008} + 2^{2011} + 2^{2012} = (2^{1004} + 2^{1006})^2.$$

Per dimostrare l'unicità si può ragionare al seguente modo. Si osservi che $2^{2011} + 2^{2008} + 2^n = 9 \cdot 2^{2008} + 2^n$ per cui bisogna verificare se esistono altri interi n diversi da 2012 per i quali $9 \cdot 2^{2008} + 2^n$ è un quadrato. Si possono distinguere due possibili casi:

- $n < 2008$; in questa ipotesi si ha $9 \cdot 2^{2008} + 2^n = 2^n(9 \cdot 2^{2008-n} + 1)$. Dato che $9 \cdot 2^{2008-n} + 1$ è dispari i fattori $9 \cdot 2^{2008-n} + 1$ e 2^n sono primi tra loro e per avere che il loro prodotto sia un quadrato, entrambi devono essere quadrati. Quindi n deve essere necessariamente pari e questo comporta che $9 \cdot 2^{2008-n}$ è un quadrato. Si sono pertanto individuati due quadrati che differiscono di una unità e non esistendo quadrati con questa proprietà si conclude che non può essere $n < 2008$.

- $n > 2008$; in questo caso si ha $9 \cdot 2^{2008} + 2^n = 2^{2008}(9 + 2^{n-2008})$. Per ottenere il quadrato richiesto è necessario e sufficiente che $9 + 2^{n-2008}$ sia un quadrato e cioè che $9 + 2^{n-2008} = x^2$ con x intero positivo; vale a dire $2^{n-2008} = (x-3)(x+3)$. I due termini $x-3$ e $x+3$ devono essere due potenze di due che differiscono di sei unità. L'unica possibilità è che siano, rispettivamente, 2 e 8. In altri termini $x = 5$ e $2^{n-2008} = 16$. Quindi $n = 2012$ è l'unica soluzione esistente.